MA34-B Estadística

Precisiones Auxiliares 2 y 3 (30 y 31 marzo 2009)

3 de abril de 2009

- `Precisión: auxiliar 2, Lunes 30 marzo`

  En el **Problema 1** donde se tenía una m.a.s. con función de densidad

  $$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-(x-a)} \qquad \forall x \geq a$$

  Parte e) Suponga que θ es conocido y a es desconocido. Encuentre el estimador de verosimilitud de a

  Sol:

  Igual que en la parte b) la función de verosimilitud se escribe como sigue:

  $$f_n(x_i,a) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,a) = \frac{1}{\theta^n} e^{\frac{-\sum(x_i-a)}{\theta}}$$

  Queremos maximizar la función de verosimilitud, por lo tanto iniciaremos intentando la estrategia más natural; derivar e igualar a cero:

  $$\frac{\partial f_n(x_i,a)}{\partial a} = \frac{e^{-\frac{\sum(x_i-a)}{\theta}}}{\theta^n} \frac{n}{\theta}$$

  La expresión anterior es distinta de cero **siempre** (excepto cuando $n = 0$, caso no muy interesante, pues significa que no tenemos términos en nuestra muestra aleatoria simple). Entonces esta técnica no nos ayuda a concluir.

  Apliquemos logaritmo natural a la función de verosimilitud y veamos si podemos derivar.

  $$\ln(f_n(x_i,a)) = -n \ln\theta - \sum \frac{(x_i-a)}{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \ln(f_n)}{\partial a} = \frac{n}{\theta}$$

También distinto de cero **siempre**. Entonces ninguna de estas técnicas nos ayudó a concluir cuál será el estimador de máxima verosimilitud $\hat{a}$ del parámetro a.

Analizamos el comportamiento de la función de verosimilitud. La función está dominada por una exponencial que depende de los valores muestrales. Como la función está definida sólo para los valores muestrales mayores o iguales que a, si $a > \min(x_i)$ entonces la f_n es nula. De otra manera, la función es estrictamente creciente, desde $-\infty$ hasta $\min(x_i)$. La función de verosimilitud se maximiza cuando a es igual al mínimo de los x_i. Por lo tanto, $\hat{a} = \min(x_i)$

Nota: el error en la clase fue dibujar la función pensando que en el eje x se pueden ordenar los valores muestrales $(x_i)_{i=1}^n$, pues la función de verosimilitud no depende de UN valor muestral, sino que de TODOS simultáneamente En el dibujo, en el eje x deben ir SOLAMENTE los posibles valores de a. Como la muestra está dada, es "fija", y la función de verosimilitud la queremos derivar con respecto a a. Por lo tanto obtenemos una expresión del estilo:

$$f_n = CTE \cdot e^{\frac{na}{\theta}} \qquad \text{con } n \text{ y } \theta \text{ números fijos}$$

- `Precisión: auxiliar 3, Martes 30 marzo`

En el **Problema** dónde se tenía una m.a.s. de la variable X que depende del parámetro θ tal que:

$$f(x) = \frac{1}{a} \qquad \text{con} \quad \theta \leq x \leq \theta + a$$

Parte c) Deduzca la condición para que exista un estimador de máxima verosimilitud y la condición para que sea único.

Sol: La función de verosimilitud se escribe como sigue:

$$f_n(x_i, \theta) = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad \forall x_i \in [\theta, \theta + a]$$

Es decir, la función de verosimilitud es constante e igual a $\left(\frac{1}{a}\right)^n$ si TODO $x_i \in [\theta, \theta + a]$. En otras palabras:

$$\theta \leq \min(x_i)$$

$$\theta \geq \max(x_i) - a$$

Entonces, existe solución cuando se cumplen las dos desigualdades anteriores simultánemanete, esto es:

$$\max(x_i) - \min(x_i) \leq a$$

El estimador será único cuando $\max(x_i) - \min(x_i) = a$

Nota: Dicho de otra manera, la función de verosimilitud es constante cuando todos los valores muestrales están contenidos en un intervalo de largo a, entonces cuando $\max(x_i) - \min(x_i) \leq a$ existen varios $\hat{\theta}$'s que sirven para estimar el valor de θ, *siempre respetando* que el intervalo de los valores muestrales esté contenido en el intervalo $[\theta, \theta + a]$. En cambio, cuando $\max(x_i) - \min(x_i) = a$, no podemos escoger más que $\hat{\theta} = \min(x_i) = \max(x_i) - a$, para así respetar la condición.