CLASE AUXILIAR 5:
PAUTA EJERCICIOS PROPUESTOS

ANDRÉS ITURRIAGA J. - HÉCTOR OLIVERO Q.

Solución 1:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad & f_n(\vec{x}/\lambda) &= \frac{\lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda}}{\prod x_i!} \\
&(2) \quad & \pi(\lambda) &= \frac{\lambda e^{\frac{-\lambda}{5}}}{25\Gamma(2)} \\
&(3) \quad & \xi(\lambda/\vec{x}) &= \frac{\frac{\lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda}}{\prod x_i!} \frac{\lambda e^{\frac{-\lambda}{5}}}{25\Gamma(2)}}{\int_0^\infty \frac{\lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda}}{\prod x_i!} \frac{\lambda e^{\frac{-\lambda}{5}}}{25\Gamma(2)} d\lambda} \\
&(4) \quad & \xi(\lambda/\vec{x}) &= \frac{\lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda} \lambda e^{\frac{-\lambda}{5}}}{\int_0^\infty \lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda} \lambda e^{\frac{-\lambda}{5}} d\lambda} \\
&(5) \quad & \text{Sea} & \\
&(6) \quad & r &= \sum x_i + 2 \\
&(7) \quad & s &= (n + \frac{1}{5})^{-1} \\
&(8) \quad & \xi(\lambda/\vec{x}) &= \frac{\lambda^{r-1} e^{\frac{-\lambda}{s}}}{c(\vec{x})} \chi_{(0,\infty)}
\end{aligned}
$$

Donde la función $c(\vec{x})$ es tal que ξ integra uno. Mirando la última ecuación reconocemos que se trata de una distribución Gamma de parámetros r y s.
Sabemos que el estimador de Bayes para pérdida cuadrática es $\mathbb{E}(\lambda)$. Luego:

$$
\begin{aligned}
&(9) \quad & \hat{\lambda} &= \frac{5n\bar{X}_n + 10}{5n + 1} \\
&(10) \quad & \text{Se calcula:} & \\
&(11) \quad & \mathbb{E}(\hat{\lambda}) &= \frac{5n}{5n+1}\lambda + \frac{10}{5n+1} \\
&(12) \quad & \mathbb{V}ar(\hat{\lambda}) &= (\frac{5n}{5n+1})^2 \frac{\lambda}{n}
\end{aligned}
$$

Con lo que tenemos que el estimador es asintóticamente insesgado y consistente.

Solución 2:

Método de Máxima Verosimilitud:

$$
f_X(t/\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha 2^\alpha}{t^{\alpha+1}} & t \geq 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}
$$

Entonces:

$$
f_n(\vec{x}/\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha^n 2^{n\alpha}}{(\prod_{i=1}^n x_i)^{\alpha+1}} & \text{Si } x_i \geq 2 \ (\forall i = 1, \dots, n) \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}
$$

Luego:

$$L(\alpha) = \ln(f_n(\vec{x}/\alpha)) \tag{13}$$

$$L(\alpha) = n\ln(\alpha) + n\alpha\ln(2) - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \tag{14}$$

$$\frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n\ln(2) - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \tag{15}$$

(16) De donde:

$$\frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \Longleftrightarrow \tag{17}$$

$$\alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{x_i}{2})} \tag{18}$$

(19) Por lo tanto:

$$\hat{\alpha}_{\text{MV}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{x_i}{2})} \tag{20}$$

Método de los Momentos:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2\alpha}{\alpha-1} \tag{21}$$

(22) Igualamos $\mu_1 = m_1$

$$\frac{2\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}-1} = \bar{X}_n \tag{23}$$

(24) Finalmente:

$$\hat{\alpha}_{\text{M}} = \frac{\bar{X}_n}{\bar{X}_n - 2} \tag{25}$$

Solución 3:

Tenemos

$$f_n(\vec{x}/\theta) = \begin{cases} \frac{1}{(2-\theta)^n} & \text{Si } x_i \in [\theta, 2]\ (\forall i = 1, \ldots, n) \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

De aquí: $\hat{\theta}_{MV} = \text{mín}\{x_i\}_{i=1}^{n}$ Se tiene que:

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{n\theta+2}{n+1} \tag{26}$$

$$\mathbb{V}ar(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{n(\theta-2)^2}{(n+1)^2(n+2)} \tag{27}$$

Con lo que se concluye que $\hat{\theta}_{MV}$ es asintóticamente insesgado y consistente.

Solución 4:

$$f_n(\vec{x}/\alpha) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i e^{-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} & \text{Si } x_i \geq 0\ (\forall i = 1, \ldots, n) \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

De donde $\hat{\alpha}_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Se calcula:

$$\mathbb{E}(\hat{\alpha}_{MV}) = \alpha \tag{28}$$

$$\mathbb{V}ar(\hat{\alpha}_{MV}) = \frac{\alpha^2}{n} \tag{29}$$

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \tag{30}$$

$$I_n(\alpha) = \frac{n}{\alpha^2} \tag{31}$$

De donde se deduce que $\hat{\alpha}_{MV}$ es insesgado, consistente y eficiente.