CLASE AUXILIAR 4: MÉTODOS DE ESTIMACIÓN Y PROPIEDADES ESTIMADORES

ANDRÉS ITURRIAGA J. - HÉCTOR OLIVERO Q.

1. Problemas

Problema 1:

Se considera X que sigue una $Unif(0, a)$ con a fijo. Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una muestra i.i.d. de X.

1. Dé la esperanza y la varianza de $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. ¿A qué distribución se aproxima la distribución de $\bar{X}_n$ cuando n es grande?
2. Se considera el máximo de los valores muestrales: $Y = \max\{X_i\}_{i=1}^n$. De la distribución de Y y calcule su esperanza.
3. Calcule la varianza de Y y dé su límite cuando n tiende al infinito.

Problema 2:

Una fábrica de chocolate encargó a dos empresas de estudios de mercados FRIC y FRAC que estimen el consumo promedio mensual μ de chocolate per cápita en la población chilena. La empresa FRIC obtiene los consumos mensuales de chocolate per cápita sobre una m.a.s. de tamaño n de media muestral $\bar{X}$ y varianza muestral S_n^2. Por su parte, la empresa FRAC los obtiene de una m.a.s. de tamaño m de media muestral $\bar{Y}$ y varianza muestral T_m^2. Como las estimaciones de μ, $\bar{X}$ y $\bar{Y}$, dadas respectivamente por FRIC y FRAC, no son iguales, la fábrica decide combinar las dos estimaciones. Para ello proponen dos estimadores.

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= \frac{\bar{X}+\bar{Y}}{2}\\ \hat{\mu}_2 &= \frac{n\bar{X}}{m+n} + \frac{m\bar{Y}}{m+n}\end{aligned}$$

1. Calcule la esperanza y la varianza de ambos estimadores en función de la varianza σ en la población.
2. Sea $\hat{\mu}_\alpha = \alpha\bar{X} + (1+\alpha)\bar{Y}$ con $\alpha \in [0, 1]$. Encuentre el valor de α que minimiza la varianza de $\hat{\mu}_\alpha$.
3. La fábrica propone ahora tre estimadores para la varianza σ^2 del consumo de chocolate en la población:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1^2 &= \frac{S_n^2 + T_m^2}{2}\\ \hat{\sigma}_2^2 &= \frac{nS_n^2}{m+n} + \frac{mT_m^2}{m+n}\\ \hat{\sigma}_3^2 &= \frac{nS_n^2 + mT_m^2}{m+n-2}\end{aligned}$$

¿Cuáles de estos estimadores son insesgados?

Problema 3:
Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con función de densidad dada por:

$$f_X(x/\beta) = \begin{cases} \frac{\beta a^\beta}{x^{\beta+1}} & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases}$$

Con $\beta > 0$ y $a > 0$.

1. Muestre que $Y = \log(\frac{X}{a})$ sigue una distribución exponencial de parámetro β. Es decir, la función de densidad de probabilidad de Y está dada por:

$$g_Y(y/\beta) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

2. Deducir el estimador $\hat{\alpha}$ de máxima verosimilitud de $\alpha = \beta^{-1}$, suponiendo a conocido.
3. Calcular la esperanza y varianza de $\hat{\alpha}$.
4. Dé el estimador de máxima verosimilitud para β. Justifique.
5. Muestre que el estimador $\hat{\alpha}$ es de mínima varianza entre los estimadores insesgados de α.

Problema 4:
Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f_X(x/\alpha) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha} x e^{\frac{-x^2}{\alpha}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Con $\alpha > 0$.

1. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud para α. Calcule su esperanza y varianza.
2. Encuentre la cota de Cramer-Rao para la varianza de los estimadores insesgados de α.¿Qué puede decir sobre el estimador de máxima verosimilitud?

Problema 5:
Sea una m.a.s. $\{X_i\}_{i=1}^n$ obtenida de una distribución con densidad:

$$f_X(x/\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2-\theta} & t \in [\theta, 2] \\ 0 & t \notin [\theta, 2] \end{cases}$$

Donde θ es desconocido y pertenece a $[0, 2]$

1. Encuentre el estimador $\hat{\theta}_1$ de θ obtenido por el método de los momentos. Calcular su esperanza y varianza.
2. Muestre que el estimador de Máxima Verosimilitud de θ es $\hat{\theta}_2 = \text{mín}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Calcule su esperanza y varianza.
3. Estudie la consistencia de $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$.