CLASE AUXILIAR 5: PAUTA EJERCICIOS PROPUESTOS

ANDRÉS ITURRIAGA J. - HÉCTOR OLIVERO Q.

Solución 1:

Primera parte:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\bar{X}_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) && (1)\\
&= \mathbb{E}(X) && (2)\\
&= \mathbb{E}(U([0,a])) && (3)\\
&= \frac{a}{2} && (4)\\
\mathbb{V}ar(\bar{X}_n) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}ar(X_i) && (5)\\
&= \frac{1}{n}\mathbb{V}ar(X) && (6)\\
&= \frac{1}{n}\mathbb{V}ar(U([0,a])) && (7)\\
&= \frac{a^2}{12n} && (8)
\end{aligned}$$

Por teorema central del límite para n lo suficientemente grande[1] se tiene:

$$\frac{n\bar{X}_n - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n\mathbb{V}ar(X)}} \sim N(0,1)$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
n\bar{X}_n &\sim N(n\mathbb{E}(X), n\mathbb{V}ar(X)) && (9)\\
\bar{X}_n &\sim N(\mathbb{E}(X), \frac{\mathbb{V}ar(X)}{n}) && (10)\\
\bar{X}_n &\sim N(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{12n}) && (11)
\end{aligned}$$

[1] En terminos prácticos con n mayor que 30.

Segunda parte:
Primero calculamos la densidad de Y.

$$\begin{aligned}
Y &= \max\{x_i\}_{i=1}^{n} && (12)\\
F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) && (13)\\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \ldots, X_n \leq t) && (14)\\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t) && (15)\\
&= (F_X(t))^n && (16)\\
\Rightarrow f_Y(t) &= n(F_X(t))^{n-1} f_X(t) && (17)\\
&= n(\frac{t}{a})^{n-1}\frac{1}{a}\mathbb{1}_{[0,a]}(t) && (18)\\
& && (19)
\end{aligned}$$

De esta misma manera se puede encontrar la densidad del mímino. Ahora ya podemos calcular la esperanza de Y.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \int_{\mathbb{R}} t f_Y(t) dt && (20)\\
&= \int_0^a tn(\frac{t}{a})^{n-1}\frac{1}{a} dt && (21)\\
&= \frac{n}{n+1} a && (22)\\
& && (23)
\end{aligned}$$

Tercera Parte:
Calculamos $\mathbb{V}ar(Y)$ utilizando:

$$\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \int_{\mathbb{R}} t^2 f_Y(t) dt && (24)\\
&= \int_0^a t^2 n(\frac{t}{a})^{n-1}\frac{1}{a} dt && (25)\\
&= \frac{na^2}{n+2} && (26)\\
\Rightarrow \mathbb{V}ar(Y) &= \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} a^2 && (27)
\end{aligned}$$

Es claro que $\mathbb{V}ar(Y) \to 0$ cuando n tiende a infinito.

Solución 2:

Primera parte:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{\mu}_1) &= \mu && (28)\\
\mathbb{V}ar(\hat{\mu}_1) &= \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) && (29)\\
\mathbb{E}(\hat{\mu}_2) &= \mu && (30)\\
\mathbb{V}ar(\hat{\mu}_2) &= \sigma^2 \frac{1}{n+m} && (31)\\
& && (32)
\end{aligned}$$

Segunda parte:

$$
\begin{aligned}
(33) \qquad \mathbb{V}ar(\hat{\mu}_\alpha) &= \sigma^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\alpha^2 - \frac{2\sigma^2\alpha}{m} + \frac{\sigma^2}{m} \\
(34) \qquad \text{De donde:} & \\
(35) \qquad \alpha &= \frac{n}{n+m}
\end{aligned}
$$

Tercera parte:

$$
\begin{aligned}
(36) \qquad \mathbb{E}(\hat{\sigma}_1^2) &= \frac{1}{2}(\frac{n-1}{n}+\frac{m-1}{m})\sigma^2 \\
(37) \qquad \mathbb{E}(\hat{\sigma}_2^2) &= \frac{n+m-2}{n+m}\sigma^2 \\
(38) \qquad \mathbb{E}(\hat{\sigma}_3^2) &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

Solución 3:

$$
\begin{aligned}
(39) \qquad Y &= \log(X/a) \\
(40) \qquad F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) \\
(41) \qquad &= \mathbb{P}(\log(X/a) \leq t) \\
(42) \qquad &= \mathbb{P}(X \leq ae^t) \\
(43) \qquad &= F_X(ae^t) \\
(44) \qquad \Rightarrow f_Y(t) &= f_X(ae^t)ae^t \\
(45) \qquad &= \beta e^{-\beta t}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)
\end{aligned}
$$

Si consideramos a conocido entonces $Y \sim exp(1/\alpha)$ con $\alpha := 1/\beta$. Además contamos con una muestra de Y definida como $Y_i = \log(X_i/a)$.
La función de verosimilitud de α está dada por:

$$f_n(y_1,\ldots,y_n) = (\alpha)^{-n}\exp(\frac{-1}{\alpha}\sum_{i=1}^n y_i)$$

De donde se deduce que el estimador de máxima verosimilitud esta dado por:

$$\hat{\alpha}_{MV} = \bar{Y}_n$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
(46) \qquad \mathbb{E}(\hat{\alpha}_{MV}) &= \alpha \\
(47) \qquad \mathbb{V}ar(\hat{\alpha}_{MV}) &= \frac{\alpha^2}{n} \\
(48) \qquad &
\end{aligned}
$$

De lo que concluimos que $\hat{\alpha}_{MV}$ es insesgado y consistente.
Por la propiedad de la invarianza, el estimador de máxima verosimilitud de β esta dado por:

$$\hat{\beta}_{MV} = \frac{1}{\hat{\alpha}_{MV}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n Y_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(X_i/a)}$$

Finalmente calculamos la cantidad de información de Fisher:

$$I(\alpha) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \log(f_Y(y/\alpha))}{\partial\alpha^2}\right) \tag{49}$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3}y\right) \tag{50}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3}\mathbb{E}(y) \tag{51}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3}\alpha \tag{52}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \tag{53}$$

$$\Rightarrow I_n(\alpha) = \frac{n}{\alpha^2} \tag{54}$$

(55)

Luego por la cota de Cramer-Rao tenemos que $\hat{\alpha}_{MV}$ es eficiente.