PAUTA Control 2 - Probabilidades y Estadística - Otoño 2009

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Víctor Carmi - Abelino Jiménez

Pregunta 2.

a.- (2 puntos)Considere el vector discreto (X,Y) con distribución de probabilidades:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	k	k	$2k$
1	k	$2k$	$3k$

Calcule numéricamente $E(Y|X=1)$

SOLUCIÓN

Primero, calculemos el valor de k. Es claro que

$$k+k+2k+k+2k+3k=10k=1$$

lo que significa, que

$$k=\frac{1}{10}$$

Sin embargo, el cálculo para $E(Y \mid X=1)$ lo podemos hacer sin conocer de antemano el valor de k. Veamos que:

$$E(Y \mid X=1)=\sum_{i=0}^{2} i \cdot P(Y=i \mid X=1)$$

Notemos que

$$P(Y=i \mid X=1)=\frac{P(Y=i \ \wedge \ X=1)}{P(X=1)}$$

Pero $P(X=1)=k+2k+3k=6k$, luego se tiene

$$P(Y=0 \mid X=1)=\frac{k}{6k}=\frac{1}{6}$$

$$P(Y=1 \mid X=1)=\frac{2k}{6k}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=2 \mid X=1)=\frac{3k}{6k}=\frac{1}{2}$$

Así, se tiene que

$$E(Y \mid X=1)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$$

b.- (2 puntos) Considere el experimento que consiste en lanzar n veces una moneda. Se denomina "run" a una secuencia maximal de caras consecutivas. Por ejemplo, la secuencia *cssscccscsccscs* tiene 5 runs. Demuestre que el número esperado de runs es $\frac{1}{2}+\frac{n-1}{4}$.

Ind: Note X_i a la v.a. que determina si en la i-ésima posición comienza un run.

SOLUCIÓN

Sea X_i la v.a. que determina si en la i-ésima posición comienza un run. La definimos de la siguiente forma:

$$X_i = \begin{cases} 1 & si\ en\ la\ i-esima\ posicion\ comienza\ un\ run \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

Veamos que para X_1se tiene:

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} = P(X_1 = 0)$$

Para $i \neq 1$ se tiene

$$P(X_i = 1) = P(posicin\ (i-1)-esima\ sale\ sello \quad \wedge \quad posicion\ i-esima\ sale\ cara)$$

Por independencia se tiene:

$$P(X_i = 1) = P(posicin\ (i-1)-esima\ sale\ sello) \cdot P(\ posicin\ i-esima\ sale\ cara) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Con esto es claro que

$$E(X_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ i = 1 \\ \frac{1}{4} & si\ i \neq 1 \end{cases}$$

Por otra parte, se tiene que la v.a. que representa el número total de runs es

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

Luego, lo que se nos pide calcular es

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$

pero con el análisis previo, se tiene

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{(n-1)}{4}$$

c.- (2 puntos) En gran población de alumnos las notas son una v. a. con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{24} & 1 \leq x \leq 7 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Los alumnos con nota menor a 2 son eliminados, las notas entre 2 y 6 son amplificadas un 10% y aquellas mayores a 6 son transformadas en 7.

Calcule la esperanza de la variable: "notas modificadas del grupo de alumnos no eliminados". ¿Qué tipo de variable es la anterior?

SOLUCIÓN

Notemos ante todo que se nos pide calcular una esperanza condicional

$$E(Nota\ Modificada \mid Alumno\ NO\ Eliminado)$$

Luego, si condicionamos respecto a los alumnos NO eliminados, la distribución (de las notas no modificadas aún) quedaría.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{24} \cdot \frac{1}{P(Alumno\ No\ Eliminado)} & 2 \leq x \leq 7 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Pero sabemos que

$$P(Alumno\ No\ Eliminado) = \int_2^7 \frac{x}{24} dx = \frac{7^2}{48} - \frac{2^2}{48} = \frac{45}{48}$$

Luego, la función de densidad de los alumnos, condicionada a los NO eliminados es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{24} \cdot \frac{48}{45} & 2 \leq x \leq 7 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Luego, la Esperanza que se nos pide calcular, quedaría expresada como

$$E(Nota\ Modificada \mid Alumno\ No\ Eliminado) = \int_2^6 (x + \frac{x}{10}) \cdot \frac{x}{24} \cdot \frac{48}{45} dx + \int_6^7 7 \cdot \frac{x}{24} \cdot \frac{48}{45} dx$$

$$= \int_2^6 (x + \frac{x}{10}) \cdot x \cdot \frac{2}{45} dx + \int_6^7 7 \cdot x \cdot \frac{2}{45} dx$$

$$= \frac{2,2}{45} \int_2^6 x^2 dx + \frac{14}{45} \int_6^7 x dx$$

$$= \frac{2,2}{45} \left(\frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) + \frac{14}{45} \left(\frac{7^2}{2} - \frac{6^2}{2} \right) = \frac{2,2 \cdot (216 - 8)}{3 \cdot 450} + \frac{14 \cdot (49 - 36)}{90}$$

$$= \frac{2,2 \cdot 208}{3 \cdot 45} + \frac{14 \cdot 13}{90} = 5,4118$$

Claramente, la variable notas modificadas es una variable mixta, una mezcla entre una variable aleatoria continua y una discreta.