Auxiliar N°5. Variables Aleatorias Bidimensionales

Profesor: Fernando Lema F.

Auxiliares: Victor Carmi L. - Abelino Jiménez G.

Resumen

Definición de Variable Aleatoria Bidimensional

Es una función $\overrightarrow{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. Es decir, se miden dos características. $\overrightarrow{X}$ se puede escribir (X, Y).

Caso Discreto

Sea (X, Y) un vector discreto cuyo recorrido se puede denotar $R_{XY} = \{(X_i, Y_j)\}_{i=1\ ,\ j=1}^{\infty}$.
Sea $P(X_i, Y_j) = P(X = X_i\ ,\ Y = Y_i)\ \forall i, j$. Entonces por axiomas de probabilidad:

- $P(X_i, Y_j) \geq 0$
- $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(X_i, Y_j) = 1$
- Si $A \subseteq R_{XY} \Rightarrow P(A) = \sum\sum\limits_{(X_i,Y_j)\in A} P(X_i, Y_j)$

Caso Continuo

Sea (X, Y) un vector continuo, entonces existe una función real $f(x, y)$, llamada densidad de probabilidad continua tal que:

- $f(x, y) \geq 0\ \ c.t.p.$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dydx = 1$
- $P(A) = \int\int\limits_{A} f(x, y)dydx$

Distribuciones Marginales

Caso Discreto.

Se define la Distribución Marginal de X como:

$$P(X_i) = P(X = X_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X_i\ ,\ Y_j)$$

Caso Continuo.

Se define la Distribución Marginal de X como:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x,y)dy$$

Variables Aleatorias Independientes

X_1 y X_2 v.a. son independientes si

$$P(X_1 \leq a_1,\ X_2 \leq a_2) = P(X_1 \leq a_1) \cdot P(X_2 \leq a_2) \quad \forall a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$$

Suma de Variables Aleatorias Independientes

Caso Discreto

Sean X e Y v.a. independientes tomando valores en $\mathbb{Z}$ con densidades discretas P_X y P_Y respectivamente, i.e.

$$P_X(k) = P(X = k), \qquad P_Y(k) = P(Y = k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Entonces $X + Y$ toma valores en $\mathbb{Z}$ y su densidad discreta verifica:

$$P_{X+Y}(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_X(j) \cdot P_Y(k-j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_Y(j) \cdot P_X(k-j)$$

Caso Continuo

Sean X e Y v.a. independientes continuas, con densidades respectivas f_X y f_Y. Entonces $X + Y$ es v.a. continua y con densidad:

$$f_{X+Y}(z) = f_X \star f_Y\ (z)$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \cdot f_Y(z-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) \cdot f_X(z-u)du$$

Teorema de Cambio de Variables

Sean $X_1,\ X_2$ variables aleatorias con distribución absolutamente continua y densidad conjunta f_{X_1,X_2}. Sean $Y_1,\ Y_2$ variables aleatorias tales

$$Y_i = \Psi_i(X_1,\ X_2) \quad i = 1,\ 2$$

donde $\Psi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función a derivadas parciales continuas.
Entonces, siendo $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$como $\Psi(x_1,\ x_2) = (\Psi_1(x_1,\ x_2),\ \Psi_2(x_1,\ x_2))$, se tiene que Ψ es biyección, entonces se tiene:

$$f`_{Y_1,\ Y_2}(y_1,\ y_2) = f`_{X_1,\ X_2}(x_1,\ x_2) \cdot \left| det \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \left(\Psi^{-1}(y) \right) \right) \right|^{-1}$$

Ejercicios

1. Una barra de largo L, se corta al azar dos veces (equiprobable). Calcular la probabilidad de formar un triángulo con los tres trozos.

2. $X \sim Poisson(\lambda_1)$ e $Y \sim Poisson(\lambda_2)$. Si X e Y son independiente, demuestre que $X + Y \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$.

3. Suponga que estamos apuntando a un blanco circular de radio 1, que ha sido colocado de modo que su centro esté en el origen del sistema de coordenadas rectangulares. Suponga que el punto de impacto tiene distribución uniforme. Calcular la función de densidad de la distancia entre el centro y el punto de impacto.

4. Sean $X_1,\ X_2, ... ,\ X_n$ variables aleatorias independientes continuas con densidad $f_{X_i}(x) = f_X(x)\ \forall i$. Calcular la densidad de probabilidad de la variable aleatori $Z = max\{X_1,\ X_2, ...,\ X_n\}$

5. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes con funciones de densidad discretas dadas por:

$$P(X = k) = P(Y = k) = p \cdot (1 - p)^k, \quad k \in \{0, 1, 2, ...\},\ p \in (0, 1)$$

   - Encuentre la densidad discreta de $X + Y$ en $\{0, 1, 2...\}$
   - Demuestre que

$$P(X = k \mid X + Y = n) = \frac{1}{n + 1} \qquad k,\ n\ \in \{0, 1, 2, ...\},\ k \leq n$$