

Probabilidades y Estadística

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesores Auxiliares : Víctor Carmi
: Abelino Jiménez

TAREA 1

ENTREGA: 6 DE ABRIL DE 2009

1. Tres personas llegan a un cine y se sientan todos en una misma fila de n asientos (todos vacíos), de forma aleatoria. Calcule:
 - a) La probabilidad de que los tres queden contiguos.
 - b) La probabilidad de que exactamente dos de ellos queden contiguos.
 - c) La probabilidad de que ninguno de ellos quede contiguo a otro.
2. Considere un mazo de naipes.
 - a) Se extraen 4 cartas al azar con reemplazo. Calcule la probabilidad:
 - 1) Que las 4 sean, rojas o pares.
 - 2) Que las 4 sean rojas, o las 4 sean pares.
 - b) Se extraen 6 cartas sin reemplazo. Calcule la probabilidad:
 - 1) Que al menos 4 sean, rojas o pares.
 - 2) Que al menos 4 sean rojas, o al menos 4 sean pares.
3. Considere el alfabeto español compuesto de 27 letras (sin Ch y Ll)
 - a) Si se desea escoger grupos de 10 letras al azar, de cuántas maneras se puede hacer?
 - 1) Sin reposición
 - 2) Con reposición
 - b) Al sacar letras (con reposición) se obtuvo al menos una "S". Calcule la probabilidad que la primera "S" se haya obtenido en la tercera extracción.
 - c) Suponga ahora que se sacaron 10 letras (con reposición) y se obtuvo "MISSISSIPI". Cuántas palabras se pueden formar con las letras obtenidas, de tal forma que no queden 2 o más "I" juntas?
 - d) Elegidas las 10 letras, usted y su mejor amigo(a) juegan sacando letras (de entre 10, con reposición) alternadamente, ganando el que obtiene primero una "P" o una "M". Describa un espacio muestral adecuado para este juego. Cuál es la probabilidad que usted gane si comienza sacando?
4. Usted y su mejor amigo juegan a la ruleta rusa de forma tal que después de cada intento (disparo) se hace girar la rueda del revolver.
 - a) Si la rueda tiene capacidad para 6 balas y se pone solo una, calcule la probabilidad que el jugador que comienza el juego muera. Indique el espacio muestral usado

- b) Suponga que usted tiene un super revolver con la capacidad que desee (con respecto al número de balas) y que, además, puede elegir la cantidad de balas que se pondrá en el super revolver para jugar. Bajo estas condiciones, es posible que el juego sea equilibrado?
5. Sean A , B y C subconjuntos del espacio muestral Ω . Pruebe que:

$$a) \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B \cap C^c)\mathbb{P}(C^c|B)$$

$$b) \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B^c \cap C^c)\mathbb{P}(B^c|C^c)\mathbb{P}(C^c)$$

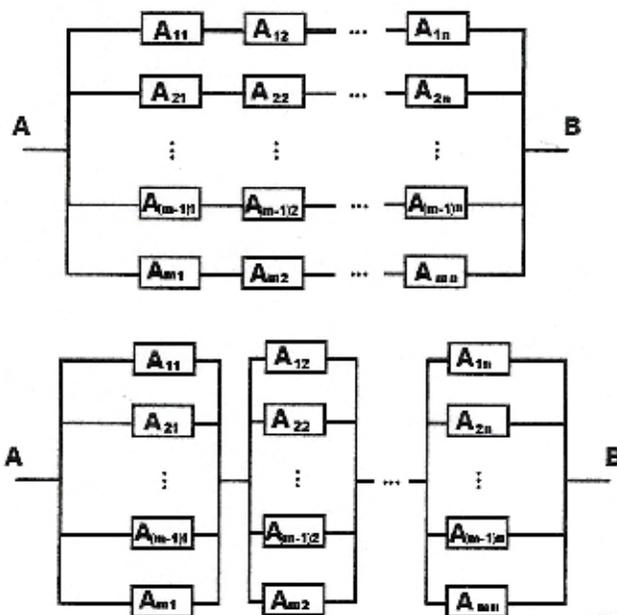
6. Suponga que una persona está situada a N cuadras al sur, y a M cuadras al oeste de la esquina a la cual se quiere llegar.
- a) Cuántos caminos “inteligentes” existen entre ambos puntos? (Camino “inteligente” se entenderá por aquel que solo consta de desplazamientos que acercan al destino, es decir, unitarios de una cuadra tanto en dirección norte como este).
- b) Considere $M=N$. Fijándose que para llegar a destino en este caso, el camino elegido debe pasar por alguna intersección de las que forman la diagonal secundaria del cuadriltero; calcule la suma de los cuadrados de los coeficientes binomiales sobre N .

Nota: En todo el problema, considere que las calles no terminan dentro del cuadriltero, o sea, todo camino “inteligente” es susceptible de ser realizado.

7. La restricción vehicular reparte los 10 dígitos posibles (2 dígitos) en forma aleatoria. Usted tiene dos autos cuyas patentes terminan en dígitos diferentes. Calcule:
- a) El total de formas en que puede programarse la restricción.
- b) La probabilidad de que algún día no pueda usar ninguno de sus vehículos. Indique el espacio muestral.
- c) Suponga ahora que con probabilidad p hay preemergencia en un día cualquiera, y en esos días se debe agregar 2 dígitos extra, que cada día que hay preemergencia se eligen de forma aleatoria entre los dígitos que quedan libres. Calcule la probabilidad de no poder usar sus autos en toda la semana (lunes a viernes).
8. En la mesa del rey Arturo están sentados 12 caballeros, cada uno de ellos enemistado con sus 2 vecinos inmediatos. El rey desea escoger un grupo de 5 caballeros para rescatar una princesa de la cueva de un dragón.
- a) De cuántas maneras se puede elegir el grupo de modo que no haya enemigos en él?
- b) Con qué probabilidad no hay enemigos en un grupo de cinco caballeros elegidos al azar?
9. Dos personas, A y B , juegan sacando cartas de dos mazos idénticos (revueltos de manera diferente), de manera independiente y con reposición (luego de sacar y ver una carta, la devuelve y revuelve nuevamente el mazo), hasta sacar un mono. Gana aquel que realiza un menor número de extracciones.

- a) Plantee un espacio muestral para este juego-experimento.
 b) Calcule las siguientes probabilidades: que A gane, que A pierda y que empaten.

10. Considere los siguientes circuitos:



Las componentes A_{ij} tienen una probabilidad p de funcionar ($(1-p)$ de fallar) y lo hacen de forma independiente. Calcule para ambos circuitos la probabilidad que exista flujo desde el punto A hasta el punto B.

11. En un concurso de TV existen 3 puertas con un premio millonario detrás de una de ellas. El animador (que sabe cuál es la puerta millonaria) le pide al concursante que escoja alguna. Posteriormente el animador abre una puerta no premiada de entre las dos que quedan y se la muestra al concursante. Le ofrece además cambiar su elección de puerta. Indique con argumentos probabilísticos que le conviene al concursante.
12. Para predecir el tiempo un día es clasificado como seco o lluvioso. Por experiencia se sabe que la probabilidad que un día sea igual al anterior se asume constante e igual a p .
- a) Si el 1 de abril es seco con probabilidad β muestre que la probabilidad que el n -ésimo día del año (contado a partir del 1 de abril) sea seco (P_n) queda dada por:

$$P_n = [(\beta - \frac{1}{2})(2p - 1)^{n-1}] + \frac{1}{2}$$

b) Si el 16 de abril está seco calcule la probabilidad que el 14 de abril también lo haya estado. Para esto considere $\beta = 1$, $p = \frac{9}{10}$.

13. Se realiza una serie de lanzamientos independientes entre sí con una moneda no equilibrada ($\mathbb{P}(\text{cara}) = p \neq 0,5$). Sea P_n la probabilidad de que al enésimo lanzamiento se haya acumulado una cantidad par de caras. Demuestre que:

$$P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1 - p)P_{n-1}$$

Use ese resultado para probar que:

$$P_n = \frac{1}{2}(1 + (1 - 2p)^n)$$

14. Cuando en una encuesta se desea preguntar por algún tema delicado como el aborto (o infidelidad, violencia, divorcio, etc), y que las personas no estén dispuestas a contestar abiertamente, se puede usar el siguiente procedimiento encubierto para estimar la probabilidad p que una persona este a favor:

Al encuestado se le presentan dos preguntas:

A: Esta de acuerdo con el aborto?

B: Esta en desacuerdo con el aborto?

y se le pide que lance (en secreto) un dado perfecto, de modo tal que si sale mayor a cuatro contesta A y en caso contrario contesta B. Por último lo único que el encuestado responde es SI o NO.

- Describa un espacio muestral para este procedimiento
- Si una persona respondió SI, cuál es la probabilidad que este a favor del aborto?
- Si a usted, como encargado de la encuesta, le entregan como resultado la proporción (probabilidad) de personas que respondió SI (P_S), calcule la proporción (probabilidad) de personas que esta a favor del aborto.

Obs: Suponga que la encuesta es aplicado a un gran número de personas y que estas son honestas al responder.

15. Cierta enfermedad congénita se transmite a la descendencia de modo que si uno de los padres presenta el gen 27 del tipo triploide, cada hijo tiene probabilidad α de enfermar si este era de su padre y β si era de su madre; si ambos presentan el gen es seguro que enfermar. Por otro lado se sabe que la enfermedad no aparece espontáneamente y que cada padre tiene una probabilidad p de presentar el gen (independientemente).

- Si una persona está enferma ¿cuál es la probabilidad que esta enfermedad haya sido transmitida solo por la madre?
- Suponga un segundo hijo (hermano del anterior). Calcule la probabilidad que esté enfermo si se sabe que su hermano lo está. ¿Qué puede decir de los eventos "primer hijo enfermo" y "segundo hijo enfermo"?