

GUIA #6 DE EJERCICIOS DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

MA-3403 Prof. R. Gouet, 3/06/09

1. Se ha podido determinar que la duración de una componente electrónica es una v.a. T positiva, con densidad de probabilidad $f(t; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}, t \geq 0, \theta > 0$, donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido que se quiere estimar, a partir de una muestra aleatoria simple (MAS) $T_1, T_2, \dots, T_n$. Muestre que el estimador máximo verosímil (EMV) de θ está dado por $\hat{\theta} = \bar{T} = \sum_{i=1}^n T_i$ y compruebe que es insesgado.

2. El número de fallas de una máquina, durante el intervalo de tiempo $[0, t]$ (expresado en horas) se puede modelar como una v.a. K con función de probabilidad de Poisson, dada por

$$p(k; \theta) = \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^k}{k!},$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, t > 0$ y $\theta > 0$ es un parámetro desconocido que se requiere estimar, a partir de una muestra aleatoria simple (MAS) $K_1, K_2, \dots, K_n$.

- (i) Encuentre el EMV de θ y calcule su varianza.
 - (ii) Se han efectuado 8 observaciones independientes de la máquina, en períodos de 24 horas, obteniéndose los resultados siguientes, respecto del número de fallas: 1, 3, 0, 5, 2, 3, 2, 4. Calcule una estimación (numérica) para θ , a partir del EMV obtenido en (i).
3. Considere el experimento que consiste en hacer lanzamientos independientes de una moneda, con probabilidad de cara θ desconocida, hasta que hayan salido n caras. De este experimento se han registrado los largos, eventualmente nulos de las rachas de sellos entre las n caras $X_1, X_2, \dots, X_n$, es decir, X_1 es el número de sellos desde el comienzo hasta la primera cara; X_2 es el número de sellos entre la primera y la segunda cara, etc.
 - (i) Muestre que las v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ son una MAS de la v.a. discreta X con valores $x = 0, 1, 2, \dots$ y función de probabilidad

$$p(x; \theta) = (1 - \theta)^x \theta, \quad \theta \in [0, 1] = \Theta.$$

- (ii) Calcule el EMV de θ .
4. Dada una MAS $X_1, X_2, \dots, X_n$ de un modelo de Poisson de parámetro λ . Interesa estimar la probabilidad del valor 0, es decir, $g(\lambda) = P_\lambda(X_1 = 0) = e^{-\lambda}$. Para ello consideramos tres estimadores: $\hat{g}_1 = e^{-\bar{X}}$ (estimador de momentos), $\hat{g}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i=0\}}$ (proporción de ceros en la muestra) y $\hat{g}_3 = (1 - 1/n)^{n\bar{X}}$. Muestre que el primer estimador es sesgado y los dos últimos son insesgados para $g(\lambda)$.

5. Se desea determinar lo más precisamente posible el área de un rectángulo de lados a, b con largos desconocidos l_a y l_b respectivamente. Para ello se realizan n mediciones independientes de ambos lados (a y b) obteniendo los pares de va $Z_1 = (X_1, Y_1), \dots, Z_n = (X_n, Y_n)$. Suponga que las Z_i son independientes e idénticamente distribuidas (iid) con densidad $f(x, y; \theta)$, donde $\theta = (l_a, l_b) \in \Theta = \mathbb{R}_+^2$ es el parámetro desconocido. Suponga además que $E_\theta(X_i) = l_a, E_\theta(Y_i) = l_b, Var_\theta(X_i) = Var_\theta(Y_i) = 1$, para $i = 1 \dots n$. Interesa estimar $g(\theta) = l_a l_b$ (el área del rectángulo), para lo cual se proponen los estimadores $\hat{g} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$ y $\tilde{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i$. Muestre que ambos estimadores son insesgados para $g(\theta)$ y calcule sus respectivas varianzas.

6. Considere va iid $X_1, X_2, \dots, X_n$ con distribución de Pareto. Es decir,

$$P_\theta(X_1 \leq x) = 1 - (\theta/x)^c, \quad x \geq \theta,$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido y $c > 0$ es una constante conocida. Considere la función $T(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = Z_n/\theta$, con $Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

- (i) Muestre que la distribución de Z_n es $F_{Z_n}(z) = 1 - (\theta/z)^{nc}$, $z \geq \theta$.
- (ii) Verifique que T sirve como función pivote para θ .
- (iii) Construya explícitamente un intervalo de confianza de nivel $100(1 - \alpha)\%$ para θ , basado en T . Calcule t_{α_1} y t_{α_2} de manera que las probabilidades de los intervalos a izquierda y derecha sean $\alpha/2$.

7. Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una MAS del modelo triangular, con densidad

$$p(x; \theta) = 2(\theta - x)/\theta^2,$$

para $0 \leq x \leq \theta$, $\theta > 0$ y $p(x; \theta) = 0$ en otros casos.

- (i) Muestre que $T(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}/\theta$ es una función pivote para θ .
 - (ii) Usando la función pivote definida en (i), construya un intervalo de confianza de nivel $100(1 - \alpha)\%$ para θ .
 - (iii) Calcule el largo del intervalo de confianza obtenido en (ii) y plantee el problema de optimización para obtener el intervalo más corto.
8. Sea $X_1, \dots, X_n$ una MAS del modelo uniforme sobre el intervalo $(0, \beta)$. Escribir un intervalo de confianza para β con nivel de confianza $1 - \alpha$. En particular, calcular un intervalo de confianza para $\alpha = 0.1$ si se obtiene la siguiente muestra de 4 elementos: 1.13, 0.67, 1.32, 0.27. Indicación: considere como pivote a la función $T(X, \beta) = \max\{X_1, \dots, X_n\}/\beta$.
9. Suponga que X_1 y X_2 siguen una distribución Uniforme $U[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$. Probar que

$$[\min\{X_1, X_2\}, \max\{X_1, X_2\}]$$

es un intervalo de confianza al 50% para θ .