GUIA #5 DE EJERCICIOS DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

MA-3403 Prof. R. Gouet, 3/06/09

1) Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. positivas i.i.d. con densidad de probabilidad común $f(x) = xe^{-x}, x > 0$ y sea $Z_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, n = 1, 2, \ldots$. Muestre que $\sqrt{n}Z_n$ converge en ley a una v.a. Z y determine su densidad. Indicación: Calcule $P[X > x]$, $P[\sqrt{n}Z_n > z]$ y use el desarrollo de Taylor de e^{-x} en torno a 0.

2) Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ variables i.i.d. Poisson de parámetro λ. Se define la varianza muestral como la variable aleatoria $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$, donde $\overline{X}_n$ es el promedio de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Aplique la ley de grandes números (casi segura) para mostrar que S_n^2 converge casi seguramente hacia λ. Indicación: note que sumas y funciones continuas de sucesiones que convergen casi seguramente, también convergen casi seguramente.

3) La empresa "Akomer" entrega servicio de colación diaria a los 1250 empleados de una industria. Cada persona tiene derecho a acompañar su colación con un máximo de 3 panes y se sabe que deciden independientemente la cantidad X de panes que cada uno consumirá, la cual puede considerarse como una v.a. discreta con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ y probabilidades $p_0 = 0.1, p_1 = 0.6, p_2 = 0.2, p_3 = 0.1$. La empresa debe encargar previamente el número total de panes a un proveedor, siendo muy importante que nadie se quede sin su pan pero al mismo tiempo, intentando que no sobren demasiados porque eso iría a pérdida.
   (i) Calcule la esperanza y la varianza de la v.a. S definida como el número total de panes consumidos en la colación.
   (ii) Muestre que la función de distribución $F_S(x)$ de la v.a. S es aproximadamente $\Phi(\frac{x-1625}{27.58})$, donde Φ es la función de distribución de la v.a. normal $N(0,1)$.
   (iii) Use el resultado de la parte (ii) para calcular aproximadamente el número de panes N que debe encargar al proveedor, de manera que la probabilidad de que todos queden satisfechos (hay suficiente pan) sea superior a 0.95. Exprese su resultado en términos de Φ o su inversa.

4) Sean $P_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n$ puntos en el plano $\mathbb{R}^2$. Se define el centro de gravedad de los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ como el punto G_n de coordenadas $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ e $\overline{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. Suponga que se escogen n puntos al azar en una circunferencia de radio r, use la Ley de Grandes Números (en cualquiera de sus versiones) para probar que el centro de gravedad converge hacia el centro de la circunferencia, cuando $n \to \infty$.

5) Sea (U_n) una sucesión de v.a. i.i.d. con ley uniforme en $[0, 1]$. Sea

$$Y_n = \max\{U_1, \frac{U_2}{2}, \ldots, \frac{U_n}{n}\}, n = 1, 2, \ldots$$

Muestre que la sucesión (Y_n) converge en ley a una v.a. Y cuya ley debe identificar.

6) Sean $(X_n), (Y_n)$ dos sucesiones de variables aleatorias independientes tales que para cada n, m X_n e Y_m son independientes con distribuciones respectivas Gamma(λ, n) y Gamma(λ, m). Muestre que

$$\lambda \frac{X_n - Y_n}{\sqrt{2n}} \longrightarrow Z \quad \text{(en ley)},$$

cuando $n \to \infty$, donde Z es una v.a. normal $N(0, 1)$.