

Probabilidades y Estadística
Guía Control # 3

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

1. Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con distribución F . Considere la variable aleatoria $F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$ llamada distribución empírica de F (¿por qué?). Probar que $F_N(x)$ converge casi seguramente a $F(x)$. Encontrar la distribución límite de $\sqrt{N}(F_N(x) - F(x))$.
2. Sean θ_1 y θ_2 dos estimadores insesgados tales que $\text{Var}(\theta_1) < \text{Var}(\theta_2)$. Probar que

$$\mathbb{P}(|\theta_1 - \theta| > \epsilon) < \mathbb{P}(|\theta_2 - \theta| > \epsilon)$$

3. Sean n y m enteros positivos y desconocidos. Suponga que X e Y son variables aleatorias, independientes, discretas con funciones de probabilidad dadas por

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{2k}{n(n+1)} & 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$
$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{2(m+1-k)}{m(m+1)} & 1 \leq k \leq m \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

Suponga que se observan las realizaciones $X = i$, $Y = j$. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud para n y m .

4. (Mejor estimador lineal insesgado)

Suponga que $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias no correlacionadas, tales que $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $\text{Var}(X_i) = v_i$, $\forall i = 1, \dots, n$

Consideremos el estimador para la media μ

$$Y = \sum_{i=1}^n c_i X_i$$

donde c_i son constantes por determinar.

- a) Pruebe que Y es insesgado $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n c_i = 1$.
 - b) Encuentre la varianza de Y en términos de c_i y v_i .
 - c) Minimice la varianza del estimador sujeto a que sea insesgado.
 - d) Encuentre, como caso particular, el estimador lineal de mínima varianza cuando las varianzas de las v.a. son iguales.
5. Suponga que X_1 y X_2 siguen una distribución Uniforme $U\left[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right]$. Probar que

$$[\min\{X_1, X_2\}, \max\{X_1, X_2\}]$$

es un intervalo de confianza al 50 % para θ .