Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidades y Estadística 09-1

Clase Auxiliar # 10

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

P3. Encontrar el estimador de máxima verosimilitud para:

(a) el parámetro p de una distribución geométrica y también su media y su varianza.

(b) el parámetro μ de una distribución Poisson y también su media y su varianza.

(c) el parámetro λ de una distribución Exponencial y también su media y su varianza.

Sol:

(a) Recordemos que la geométrica verifica $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ donde $n \geq 1 \quad n \in \mathbb{N}$. Así, para una muestra $(x_1, \ldots, x_n)$ escribimos la función de verosimilitud(recordamos que lo que desconocemos es el parámetro p:

$$\widetilde{L}(x_1, \ldots, x_n, p) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i - 1} = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}$$

Como técnica estándar , para minimizar esta función aplicamos ln(). Pues esta función es una biyección creciente y el cálculo de su mínimo es más sencillo ya que trasnformamos los productos en sumas.

$$L = ln(\widetilde{L}(x_1, \ldots, x_n, p)) = nln(p) + (\sum_{i=1}^{n} x_i - n)ln(1-p)$$

Ahora tratamos de minimizar esta función haciendo el gradiente igual a 0 (en la auxiliar vimos un problema donde esto no se podía hacer). En general , esto se debe reconocer caso a caso.

Calculamos el gradiente (en este caso como es un sólo parámetro es la derivada) y lo igualamos a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{n}{p} + - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i - n)}{1-p} = 0$$

. De aquí despejamos p y se llega al estimador de máxima verosimilitud

$$\widehat{p} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

.

(b) Primero recordemos que X ~Poisson(μ) si $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$ donde $n \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}$ Hacemos el mismo procedimiento que antes:

$$\widetilde{L}(x_1, \ldots, x_n, \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!} e^{-\mu} = \frac{\mu^{\sum x_i}}{\prod x_i!} e^{-n\mu}$$

Igual que antes tomamos ln():

$$L = ln(\widetilde{L}(x_1, \dots, x_n, \mu)) = -n\mu + (\sum_{i=1}^{n} x_i) ln(\mu) - \sum_{i=1}^{n} ln(x_i!)$$

Calculamos la derivada(con respecto al parámetro μ) y lo igualamos a 0

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -n + (\sum_{i=1}^{n} x_i)\frac{1}{\mu} = 0$$

De donde se obtiene el estimador de máxima verosimilud para μ.

$$\widehat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

O sea, en este caso el estimador de máxima verosimilitud resultó ser el promedio.

(c) X ∼exp(λ) si X tiene densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Luego, la funcioón de verosimilitud está dada por:

$$\widetilde{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda e^{-\lambda x i}) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

(siempre que $\min\{x_1, \dots, x_n\} > 0$,lo cual es cierto si suponemos que tienen distribución exponencial) (si no es cero). Tomando ln().

$$L = ln(\widetilde{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda)) = n ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Derivando con respecto a λ e igualando a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Y despejamos el estimador de máxima verosimilitud:

$$\widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Este resultado no es sorpresa, ya que sabemos que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ si $X \sim exp(\lambda)$

Tarea:Dar un argumento para asegurar que los valores encontrados en los ejemplos anteriores son de verdad máximos.