



CLASE AUXILIAR # 3

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

**P3.** Hagamos el caso que  $Z_n$  es absolutamente continua. Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $g$  es continua en  $c$ , existe  $\delta$  tal que  $|x - c| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(c)| < \epsilon$ . Calculemos:

$$\mathbb{E}(g(Z_n)) = \int_{|x-c|<\delta} g(x)f_{Z_n}(x)dx + \int_{|x-c|\geq\delta} g(x)f_{Z_n}(x)dx$$

Para la primera integral, como integramos en  $\{|x - c| < \delta\}$ , se tiene  $g(x) < g(c) + \epsilon$ . En la segunda, acotamos  $g(x)$  por su cota  $M$  (sabemos por hipótesis que  $g$  es acotada). Así:

$$\mathbb{E}(g(Z_n)) \leq (g(c)+\epsilon) \int_{|x-c|<\delta} f_{Z_n}(x)dx + M \int_{|x-c|\geq\delta} f_{Z_n}(x)dx = (g(c)+\epsilon)\mathbb{P}(|Z_n-c| < \delta) + M\mathbb{P}(|Z_n-c| \geq \delta) \quad (1)$$

Análogamente se tiene (acotando  $g(x) \geq g(c) - \epsilon$  y  $g(x) \geq -M$ ) se llega a

$$\mathbb{E}(g(Z_n)) \geq (g(c)-\epsilon) \int_{|x-c|<\delta} f_{Z_n}(x)dx - M \int_{|x-c|\geq\delta} f_{Z_n}(x)dx = (g(c)-\epsilon)\mathbb{P}(|Z_n-c| < \delta) - M\mathbb{P}(|Z_n-c| \geq \delta) \quad (2)$$

Tomando limsup en (1) y liminf en (2) y ocupando la ley débil de los grandes números, se llega a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) \leq g(c) + \epsilon$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) \geq g(c) - \epsilon$$

Por último, haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$  en estas desigualdades, se llega a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) \leq g(c)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) \geq g(c)$$

de donde  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) \Rightarrow$  existe el límite y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) = g(c)$  lo cual concluye el ejercicio.

**P3.** Siguiendo la indicación, si  $X_1 \dots X_n$  siguen una Bernoulli( $p$ ), entonces  $X_1 + \dots + X_n$  sigue una Binomial( $n, p$ ). Se tiene que

$$\mathbb{E}[f(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n})] = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Nota: usamos  $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{a: p(a) > 0} g(a)p(a)$  para una v.a discreta. (En el caso anterior  $g(x) = f(x/n)$  y  $X$  toma valores en  $\{0, \dots, n\}$ )

Además como  $[0,1]$  es compacto,  $f$  es acotada. Además por la ley débil de los grandes números tenemos la condición del problema anterior con  $c = nx = \mathbb{E}(X_1 + \dots X_n)$ . Ocupando esto, se tiene

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_1 + \dots X_n}{n}\right)\right] \rightarrow f\left(\frac{nx}{n}\right) = f(x)$$