Clase Auxiliar # 9

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

P1. Un cierto componente es crítico en la operación de un sistema eléctrico y debe ser reemplazado inmediatamente después que falla. Si la media del tiempo de vida es de 100 horas y su desviación estándar es 30 horas, cuántos de esos componentes deben estar en stock para que la probabilidad de que el sistema esté en operación continua por los próximos 2000 años sea al menos 0,95?

P2. Si X tiene varianza σ^2 y media μ , pruebe que $\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$

P3. Sea Z_n $n \geq 1$ una secuencia de variables aleatorias y c una constante tal que para todo $\epsilon > 0$: $\mathbb{P}(|Z_n - c| > \epsilon) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Muestre que para cualquier función acotada continua g,

$$\mathbb{E}(g(Z_n)) \to g(c) \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

P4. Sea $f(x)$ una función continua definida para $0 \leq x \leq 1$. Considere las funciones

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

(llamados polinomios de Bernstein) y pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x)$$

Hint: Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias Bernoulli independientes con media x. Muestre que

$$B_n(x) = \mathbb{E}[f(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n})]$$

La convergencia de $B_n(x)$ a $f(x)$ es uniforme en x. Este resultado es una demostración probabilista del famoso teorema de Stone-Weierstrass, que dice que toda función continua en un compacto puede ser aproximada arbitrariamente por polinomios.

P5. A menudo se necesita estimar la dispersión de una variable aleatoria X cuya media y varianza se saben finitas pero son desconocidas. Para ello es usual obtener de manera independiente varios valores de la variable aleatoria,digamos $X_1 \ldots X_n$,y estimar $\sigma^2 = Var(X)$ por

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu}_n)^2, \qquad \text{donde } \widehat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

(i) Si $\mu = \mathbb{E}(x)$ observe que $(X_i - \widehat{\mu}_n)^2 = ((X_i - \mu) - (\widehat{\mu}_n - \mu))^2$ y pruebe que

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\widehat{\mu}_n - \mu)^2$$

(ii) Justifique la elección del estimador $\widehat{\sigma}_n^2$ estableciendo que $\mathbb{P}(\{\lim_{n\to\infty} \widehat{\sigma}_n^2 = \sigma^2\}) = 1$