Probabilidades y Estadística
Guía Control # 2

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

1. Sea $X \sim U(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Encontrar la esperanza y la varianza de $Y = sin(X)$.
2. Sean $X_1, ..., X_n$ variables independientes con $X_i \sim Exp(\lambda)$. Sea $Y = \text{mín}\{X_1, ..., X_n\}$. Encontrar la esperanza y la varianza de Y.
3. Determine la esperanza de la variable aleatoria $Y = \frac{1}{1+X}$, si X se distribuye según una Poisson de parámetro λ.
4. Sean X e Y variables independientes con distribución $\mathcal{N}(0,1)$. Se define $Z = \frac{X}{Y}$. Encuentre la función de distribución acumulada de Z y su densidad de probabilidad.
5. Existen 2 oficinas A y B. En cada oficina hay un computador con un disco duro, cuyo tiempo de vida está distribuido según una exponencial de parámetro λ. Si un disco duro falla, se reemplaza por uno de similares características. Encontrar la probabilidad de que 3 discos duros se reemplacen en la oficina A, antes de que se reemplace el original de B.
6. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribución $U \sim [0,1]$. Encontrar la densidad de probabilidad de las variables aleatorias $S = X_1 + X_2$ y $P = X_1 \cdot X_2$.
7. Considere una colonia de bacterias con población inicial n_0. En cada generación la cantidad de bacterias puede multiplicarse por $u > 1$, con probabilidad p, o dividirse por u con probabilidad $1 - p$. Considere la variable aleatoria N, que mide la población de bacterias luego de n generaciones. Encuentre la distribución de probabilidades de N.
8. Sean X e Y variables independientes con distribución $\mathcal{N}(0,1)$. Sean $\rho(X,Y) = \sqrt{X^2 + Y^2}$ y $\theta(X,Y) = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$. Determine la densidad conjunta de (ρ, θ) y las densidades marginales f_ρ y f_θ.
9. Sean X e Y variables independientes con varianza σ^2 y τ^2 respectivamente. Encontrar la covarianza entre Z y W, para $Z = X + Y$ y $W = X - Y$.
10. En la siguiente figura se muestran los posibles caminos para viajar desde la ciudad A hacia la ciudad B, en donde se deben atravesar una serie de puentes. El funcionamiento de cada puente, que es independiente de los demás puentes, sigue una distribución exponencial de parámetro λ. Encuentre la probabilidad de que sea posible viajar desde A hasta B después de un tiempo de vida t de los puentes.

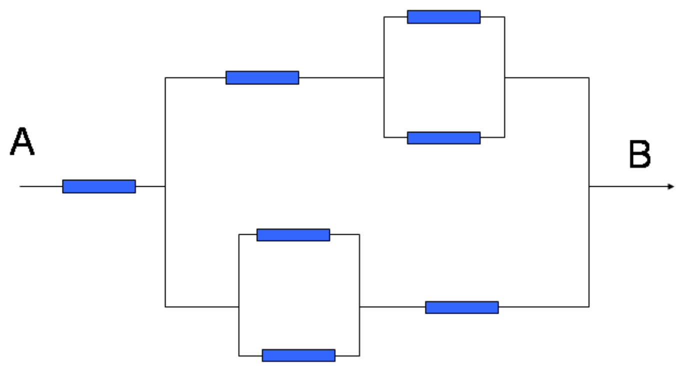

Figura 1. Caminos con puentes desde A hasta B.

11. Considere el siguiente juego: Dentro del sobre A se ponen m pesos y dentro del sobre B se ponen $2m$ pesos. Pedro y Juan no saben qué cantidad m ni qué sobre les fue asignado (los sobres son asignados equiprobablemente). Ambos abren los sobres en secreto y se les da la oportunidad de intercambiar los sobres.

    i) Pruebe que ambos tienen incentivos a cambiar los sobres, es decir, ambos calculan que el valor esperado de intercambiar los sobres es mayor al dinero que recibieron.

    Esto es una paradoja, ya que ambos no pueden beneficiarse simultáneamente al intercambiar los sobres. Suponga que los jugadores tienen creencias sobre la cantidad de dinero m que se puso en los sobres. Estas creencias corresponden a una distribución de probabilidad $p(m)$, para la cantidad de dinero m depositado en cada sobre. Además cada jugador supone que $\mathbb{P}(X = m|M = m) = \mathbb{P}(X = 2m|M = m) = 0{,}5$.

    ii) Encuentre $\mathbb{P}(M = m|X = m)$ y $\mathbb{P}(M = 2m|X = m)$.

    iii) Encuentre una condición sobre $p(m)$ para que se produzca intercambio de sobres.