Probabilidades y Estadística

Guía Control # 2 - Parte 2

MA-3403 Prof. R. Gouet, J. Lemus 27/04/09

1. Una caja contiene n bolitas, de las cuales a son blancas y b son negras, $a + b = n$. Se extraen sucesivamente las bolitas al azar y sin reposición. Sea T la variable aleatoria definida como el instante de aparición de la primera bolita blanca. Determine la función de probabilidad $p_T(t)$. Calcule el límite de $p_T(t)$ cuando $n \rightarrow \infty$, suponiendo que $a = a_n$ depende de n y es tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = p > 0$.
2. Un experimento consiste en lanzar indefinidamente, un par de dados equilibrados. Calcule la función de probabilidad de la v.a. X correspondiente al instante en que aparece por primera vez un par de valores cuya suma es 7.
3. Dos personas compiten en una serie de juegos y triunfa el primero que haya acumulado 4 juegos ganados. Suponga que una de las personas es mejor que la otra y que tiene una probabilidad p de ganar un juego cualquiera de la serie. Suponga también que hay independencia entre sucesivos juegos. Determine la función de probabilidad de la v.a. T definida como el instante en que termina el juego.
4. Considere el experimento que consiste en hacer lanzamientos independientes de una moneda cargada (probabilidad de cara p) hasta el instante en que por primera vez hay r caras o r sellos. Defina la variable aleatoria T como el número de la tirada en que esto ocurre y calcule su función de probabilidad.
5. Una caja contiene n bolitas blancas y n negras. Se extraen sucesivamente y sin reposición bolitas al azar, hasta que uno de los dos colores se agota. Defina como X la variable aleatoria definida como la cantidad de bolitas que quedan en la urna, en el instante en que se agotó uno de los colores y determine su función de probabilidad.
6. Se escoge al azar un número entero ω entre 1 y n . Sea $X(\omega) =$ “el primer dígito decimal de 2^ω ”. Calcule el límite (si existe) de la función de probabilidad de la variable aleatoria X , cuando $n \rightarrow \infty$.
7. Se ha determinado que las venta diaria de una panadería, expresada en kilos de pan, es una v.a. discreta con valores enteros no negativos y función de probabilidad $p_X(x)$ dada por: $p_X(x) = Ax$ si $0 \leq x < 500$; $p_X(x) = A(1000 - x)$ si $500 \leq x < 1000$ y $p_X(x) = 0$ en otro caso.
 - (i) Determine A para que f sea una función de probabilidad.
 - (ii) Grafique la función de probabilidad.
 - (iii) Calcule la probabilidad de que el pan vendido sea (a) más de 500 kilos; (b) menos de 500 kilos; (c) entre 250 y 750 kilos.
 - (iv) Calcule (usando la definición conocida de probabilidad condicional) $P[X > 500 | X < 500]$ y $P[X > 500 | 250 < X < 750]$.
8. Sea X una v.a. con ley uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Es decir, X tiene función de densidad dada por $f_X(x) = 1$ para $x \in [0, 1]$ y $f_X(x) = 0$ en otro caso.
 - (i) Calcule la probabilidad condicional $P[X > 1/2 | X > 1/3]$.

- (ii) Calcule la probabilidad de que el primer dígito de la expansión decimal de X sea 2.
9. Un paracaidista aterriza en un camino recto que une dos ciudades A y B, de manera que su punto de impacto es una v.a. uniforme. Calcule la probabilidad de que el cociente de su distancia a A sobre la distancia a B sea (a) mayor que 3; (b) igual a 3; (c) mayor que r , donde r es un real positivo cualquiera
10. Investigaciones de una empresa de Ingeniería de Transporte han revelado que el tiempo de espera en minutos, hasta que pase el metro por una estación, es una v.a. T con función de distribución F_T definida por: $F_T(t) = 0$ para $t \leq 0$; $F_T(t) = t/2$ para $0 \leq t \leq 1$; $F_T(t) = 1/2$ para $1 \leq t \leq 2$; $F_T(t) = t/4$ para $2 \leq t \leq 4$; $F_T(t) = 1$ para $t \geq 4$.
- (i) Grafique la función de distribución.
- (ii) Determine si F es continua y calcule su densidad de ser posible.
- (iii) Calcule la probabilidad de que una persona tenga que esperar (a) más de 3 minutos; (b) menos de 3 minutos; (c) entre 1 y 3 minutos.
- (iv) Calcule la probabilidad de que la persona espere (a) más de 3 minutos, sabiendo que ya lleva 1 minuto esperando; (b) menos de 3 minutos, dado que lleva 1 minuto esperando.
11. El tiempo en minutos que una persona demora en llegar hasta la estación buses es una v.a. X con ley uniforme en el intervalo $[20, 25]$. Si la persona deja su casa a las 7:05, cuál es la probabilidad de que alcance a tomar el bus que sale a las 7:28?
12. Una estación de radio transmite un noticiero cada hora, a la hora, entre las 6 AM y las 12 PM. Una persona sintoniza su radio en un instante aleatorio T del día, cuya ley es uniforme en el intervalo $[T_1, T_2]$. Calcule la probabilidad de que tenga que esperar menos de 10 minutos hasta oír el noticiero, en los siguientes casos: $T_1 = 6 \text{ AM}, T_2 = 12 \text{ PM}$, $T_1 = 8 \text{ AM}, T_2 = 6 \text{ PM}$, $T_1 = 7 : 30 \text{ AM}, T_2 = 5 : 30 \text{ PM}$, $T_1 = 7 : 30 \text{ AM}, T_2 = 5 \text{ PM}$.
13. Se escoge un punto (número real) al azar en el intervalo $[0, 2]$, de acuerdo con el modelo *uniforme*. Es decir, la coordenada X del punto escogido puede considerarse como una v.a. uniforme en $[0, 2]$, con densidad constante en dicho intervalo y nula, fuera de él.
- (i) Calcule la probabilidad de que el punto seleccionado corresponda a un número racional.
- (ii) Calcule la probabilidad de que se obtenga un punto irracional mayor estricto que 1.
- (iii) Calcule la probabilidad de que el número obtenido sea mayor que 1, sabiendo que es mayor que $1/2$.
- (iv) Calcule la probabilidad de que el primer dígito de la expansión decimal del número seleccionado sea par.
14. Se quiere construir un cuadrado aleatorio, escogiendo su lado como una v.a. uniforme en $[0, 1]$. Calcule la probabilidad de que el área del cuadrado resultante sea mayor que $1/4$; igual a $1/4$.
15. Considere la elección de un número al azar X , según el modelo *Exponencial* de densidad $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$ y $f(x) = 0$ para $x < 0$.
- (i) Calcule la probabilidad de que X sea mayor que t (abreviado como $X > t$), donde $t \geq 0$.
- (ii) Calcule la probabilidad de que la parte entera de X sea k , con $k \in \mathbb{N}$.

- (iii) Demuestre que $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$, propiedad conocida como falta de memoria del modelo exponencial.
16. Calcule esperanza y varianza de las variables aleatorias cuyas densidades se presentan a continuación.
- (i) $f(x) = 2x \mathbb{1}_{[0,1]}$.
 - (ii) $f(x) = |x| \mathbb{1}_{[-1,1]}$.
 - (iii) $f(x) = (1 - |1 - x|) \mathbb{1}_{[0,1]}$.
 - (iv) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,1]}$.
 - (v) $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}(1 + \frac{x^2}{3})^{-1}$
 - (vi) $f(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}(1 + \frac{x^2}{3})^{-2}$
 - (vii) $f(x) = \frac{8}{3\pi\sqrt{3}}(1 + \frac{x^2}{3})^{-3}$
17. Calcule la función generadora de la v.a. X con densidad $f_X(x) = ae^{-a|x|}$ para $x \in \mathbb{R}$.
18. Sea F la función de distribución de alguna v.a. real. Sea $F^{-1}(y) = \inf\{x | F(x) \geq y\}$, para $0 \leq y \leq 1$. Sea U una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$. Demuestre que la v.a. $X = F^{-1}(U)$ tiene distribución F .
19. Sea X una v.a. con función de distribución $F(x)$, dada por: $F(x) = 0$ si $x < 0$; $F(x) = \frac{x+1}{4}$ si $0 \leq x < 1$ o $2 \leq x < 3$; $F(x) = 3/4$ si $1 \leq x < 2$ y $F(x) = 1$ si $x \geq 3$. Calcule $P(X < 2)$, $P(X \leq 1)$, $P(1 < X \leq 3)$, $P(X > 0)$, $P(0 \leq X \leq 1)$, $P(X > 1)$.
20. La vaca clonada Dolly ha sido programada de acuerdo con un modelo genético-probabilístico, según el cual su producción diaria de leche es una v.a. X absolutamente continua, con densidad $f(x) = \alpha x$ si $0 \leq x \leq 5$; $f(x) = \alpha(\beta - x)$ si $5 \leq x \leq \beta$ y $f(x) = 0$ en otro caso.
- (i) Determine α y β para que f sea una densidad de probabilidad continua.
 - (ii) Calcule la probabilidad de que Dolly produzca al menos 7 litros, entre 3 y 8; menos de 7, sabiendo que produjo más de 5.
 - (iii) Calcule la esperanza de X .
21. Un gerente de personal debe escoger al azar entre María y Juan para una promoción, y decide lanzar una moneda de 100 pesos. Sin embargo, Juan rechaza este procedimiento diciendo que las monedas perfectamente balanceadas no existen y que, por lo tanto, cabe la posibilidad de verse perjudicado. Un estudiante de MA 3403 que pasaba oye casualmente la conversación y propone el siguiente mecanismo que, según él, garantiza igualdad de oportunidad a ambos candidatos: lanzar dos veces (independientemente) la moneda, escogiendo a Juan si el resultado es (cara, sello) o a María si el resultado es (sello, cara). En caso de que el resultado de ambas tiradas no sea ninguno de los dos anteriores, se debe repetir el procedimiento, de manera independiente.
- (i) Calcule la función de probabilidad de la variable aleatoria T , igual al número de intentos necesarios para llegar a una decisión.
 - (ii) Demuestre que el procedimiento propuesto garantiza igualdad de oportunidades a ambos candidatos, en el sentido que la probabilidad de que María sea promovida es $1/2$.

22. Una cadena colgante está hecha de eslabones de peso unitario, que se rompen con probabilidad proporcional al peso que cuelga de ellos, siempre que éste no exceda las n unidades. Es decir, la probabilidad de que un eslabón que soporta k unidades de peso se corte es k/n , si $k \leq n$. Pero si $k > n$, el eslabón se corta con seguridad. Calcule la probabilidad de que una cadena con $m \geq 1$ eslabones no se corte.
23. El Presidente de la Academia de Ciencias de un lejano país, ha organizado un debate para zanjar el problema de generar al azar una cuerda en una circunferencia de radio R . Un académico propone dibujar un radio y escoger sobre él un punto al azar, de acuerdo con la ley Uniforme en $[0, R]$ y luego, en dicho punto, trazar una perpendicular al radio, definiendo así una secante. Un segundo académico propone dibujar un par de radios que formen un ángulo Θ , escogido al azar, con ley uniforme en $[0, \pi]$, y construir la secante uniendo los extremos de los radios. Para orientar la discusión, el presidente contrata a un estudiante de MA3403 (usted, por ejemplo) cuya misión es
- Determinar, si es que existe, la densidad de probabilidad del largo de la secante en cada uno de los métodos propuestos y
 - Calcular los respectivos valores esperados y varianzas.
24. Se dice que una v.a. X es simétrica si X y $-X$ tienen la misma ley.
- Demuestre que una v.a. absolutamente continua X con densidad f es simétrica si y sólo si $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
 - Muestre que si $E(X)$ es finita, entonces necesariamente debe valer 0.
25. Un insecto se encuentra en el punto de coordenadas $(0, 1)$ del plano y debe caminar hasta llegar al eje de abscisas. Para ello escoge un ángulo Θ al azar, uniformemente en $[-\pi/2, \pi/2]$ y camina a lo largo de la recta que pasa por $(0, 1)$ y forma ángulo Θ con el eje de ordenadas. Muestre que la v.a. X , punto de llegada del insecto al eje de abscisas, tiene ley de Cauchy con parámetros $\mu = 0, \sigma = 1$. Una v.a. tiene ley de Cauchy con parámetro μ si su densidad es absolutamente continua con densidad
- $$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \mu)^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
26. Sea X una v.a. con esperanza $E(X) = \mu$ y varianza $V(X) = \sigma^2$ finitas. Sea $g(a) = E[(X - a)^2], a \in \mathbb{R}$. Muestre que $g(a)$ es finita para todo $a \in \mathbb{R}$, que alcanza su mínimo en $a^* = \mu$ y que $g(a^*) = \sigma^2$. Indicación: sume y reste μ en la expresión para $g(a)$. No se permite derivar c/r a a .
27. Un proyectil sale disparado desde el origen con velocidad inicial v y formando un ángulo Θ con la horizontal. Si dicho ángulo se escoge al azar uniformemente en $[0, \pi/2]$, determine la densidad de la v.a. D correspondiente a la distancia de impacto, medida desde el origen.