



CLASE AUXILIAR # 7

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

P1. Use el resultado que para cualquier variable aleatoria no negativa Y ,

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > t) dt$$

para mostrar que para cualquier variable aleatoria no negativa X ,

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_0^\infty nx^{n-1} \mathbb{P}(X > x) dx$$

Hint:

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X^n > x) dx$$

y haga el cambio de variables $t = xn$.

P2. Suponga que X e Y son variables aleatorias independientes que se distribuyen como una $Poisson(\alpha)$ y $Poisson(\beta)$ respectivamente. Pruebe que $X + Y$ se distribuye como una $Poisson(\alpha + \beta)$.

P3. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua positiva (i.e $X \geq 0$), F su distribución, y f su densidad. Suponga además que $F(t) \neq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y que f es continua en $\mathbb{R}_+$. Se define la tasa de falla de la variable X a través de la ecuación

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad \forall t \geq 0$$

(i) Probar que $\lambda(t)$ determina la función distribución F . Para ello pruebe que si $t \geq 0$

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right)$$

(ii) En un estudio reciente se afirma que la tasa de muerte de los fumadores es el doble que la de los no fumadores. ¿Cómo entender esto en términos de la probabilidad de sobrevivencia?, veremos que no significa que un fumador viva (en promedio) la mitad que un no fumador.

Si suponemos que el tiempo de vida de un no fumador es una variable aleatoria absolutamente continua positiva T_N , y el tiempo de vida de un fumador también es una variable aleatoria absolutamente continua positiva T_F donde $F_{T_N}(t) \neq 1$ y $F_{T_F}(t) \neq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y sus funciones de densidad son continuas en $(0, +\infty)$, entonces la comparación de dichas tasas corresponde a:

$$2\lambda_N(t) = \lambda_F(t) \quad \forall t \geq 0$$

(ii).1 Sean $0 \leq t_0 < t_1$. Probar que la probabilidad que un no fumador de al menos t_0 años alcance la edad t_1 está dada por :

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \lambda_N(s) ds\right)$$

- (ii).2 Suponga que $\lambda_N(t) = \frac{1}{30}$ para todo $t \geq 0$. Calcular la razón entre la probabilidad que un no fumador de al menos 50 aos cumpla 60 aos con respecto a la misma probabilidad para un fumador.

P4. Sea $a \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^n (Y - i) + a & aY \\ 1 & Y \end{bmatrix}$$

Calcular la probabilidad de que A sea invertible si $Y \sim \text{Geométrica}(p)$. Calcule la misma probabilidad pero ahora asumiendo que Y es una variable aleatoria absolutamente continua.