Ingeniería Matemática

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidades y Estadística 09-1

Solución Control # 1

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

P1. Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen n turnos de noche y n turnos de día. De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren de noche y $0 < b < n$ prefieren de día. El resto de los trabajadores están indiferentes entre trabajar de noche o de día. Si los turnos se reparten al azar, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda el turno que quería.

Solución: El problema se puede modelar mediante urnas y bolitas, como sigue. Consideramos dos urnas (1 y 2) y $2n$ bolitas de las cuales suponemos a blancas, b negras y $c = 2n-(a+b)$ grises. Como espacio muestral Ω escogemos la colección de todos las formas de repartir n bolitas en la urna 1 y n en la urna 2. Cada una de estas formas puede identificarse de manera única con un subconjunto de tamaño n de bolitas. De acuerdo con lo anterior, Ω tiene $\binom{2n}{n}$ elementos. Suponemos ahora que todas estas configuraciones de bolitas tiene igual probabilidad, de manera que tenemos un espacio equiprobable.

Sea $A \subseteq \Omega$ el suceso "a cada persona le corresponde el turno que quiere". Vemos que A no es un conjunto vacío porque $0 < a, b < n$ de manera que hay espacio suficiente en las urnas para acomodar las bolitas blancas en la 1 y las negras en la 2. Observemos finalmente que el número de subconjuntos de tamaño n que contienen a todas las bolitas blancas es igual al número de formas de escoger las $n-a$ bolitas grises, es decir, $\binom{c}{n-a}$. Por lo tanto,

$$P(A) = \frac{\binom{2n-a-b}{n-a}}{\binom{2n}{n}}.$$

P2. Uno de los casinos recientemente inaugurados en el país propone un juego "secuencial" que consiste en apostar en máquinas tragamonedas que funcionan independientemente, cada una con una probabilidad $p > 0$ de entregar premio. El jugador tiene acceso a la primera máquina, donde juega, pudiendo ganar o perder. Si gana debe cobrar su premio e irse del casino pero si pierde debe jugar en la segunda máquina. Nuevamente, si gana cobra el premio y deja el casino pero si pierde continúa en la tercera máquina, en la cual gana o pierde y se se retira del casino. Considere los sucesos (eventos) G_i : "el jugador recibe el premio de la máquina i", $i = 1, 2, 3$.

i) (1.2 ptos.) Explique por qué los sucesos G_i son disjuntos y pruebe que

$$P(G_i) = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Solución: Los sucesos G_i son disjuntos simplemente porque el enunciado lo dice (implícitamente).

En efecto, si G_1 ocurre entonces no puede ocurrir ni G_2 ni G_3; si G_2 ocurre no puede ocurrir G_3 porque solo se gana una vez. Para calcular las probabilidades usamos la regla de probabilidades totales. Observemos primero del enunciado que $P(G_1) = p = p(1-p)^{1-1}$. Por otra parte, notando que $P(G_2|\overline{G}_1) = p$, tenemos

$$P(G_2) = P(G_2|G_1)P(G_1) + P(G_2|\overline{G}_1)P(\overline{G}_1) = 0 \cdot p + p \cdot (1-p) = p(1-p)^{2-1}.$$

Finalmente,

$$P(G_3) = P(G_3|G_1 \cup G_2)P(G_1 \cup G_2) + P(G_3|\overline{G_1 \cup G_2})P(\overline{G_1 \cup G_2}).$$

Observamos que $P(G_3|G_1 \cup G_2) = 0$, $P(G_3|\overline{G_1 \cup G_2}) = p$ y $P(\overline{G_1 \cup G_2}) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2}) = P(\overline{G_2}|\overline{G_1})P(\overline{G_1}) = (1-p)^2$. Reemplazando arriba se obtiene $P(G_3) = p(1-p)^{3-1}$.

ii) (1.2 ptos.) Calcule la probabilidad de que el jugador no gane.

Solución: El suceso "no ganar" es el complemento de $G_1 \cup G_2 \cup G_3$, de manera que su probabilidad es

$$1 - P(G_1) - P(G_2) - P(G_3) = 1 - p - p(1-p) - p(1-p)^2.$$

iii) (1.2 ptos.) Averigüe si G_1, G_2 y G_2, G_3 son o no pares de sucesos independientes.

Solución: Notemos que

$$0 = P(G_1 \cap G_2) \neq P(G_1)P(G_2) = p^2(1-p),$$

es decir, los sucesos son independientes si $p = 0, 1$ y no lo son si $p \in (0,1)$. También

$$0 = P(G_2 \cap G_3) \neq P(G_2)P(G_3) = p^2(1-p)^3,$$

y se llega a la misma conclusión.

iv) (1.2 ptos.) Sabiendo que el jugador ha ganado, calcule la probabilidad de que el premio lo haya obtenido en la máquina i, $i = 1, 2, 3$.

Solución: Aquí debemos calcular las probabilidades condicionales

$$P(G_1|G_1 \cup G_2 \cup G_3) = \frac{P(G_1 \cap (G_1 \cup G_2 \cup G_3))}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{P(G_1)}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{1}{1 + (1-p) + (1-p)^2},$$

$$P(G_2|G_1 \cup G_2 \cup G_3) = \frac{P(G_2 \cap (G_1 \cup G_2 \cup G_3))}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{P(G_2)}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{1-p}{1 + (1-p) + (1-p)^2},$$

$$P(G_3|G_1 \cup G_2 \cup G_3) = \frac{P(G_3 \cap (G_1 \cup G_2 \cup G_3))}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{P(G_3)}{P(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} = \frac{(1-p)^2}{1 + (1-p) + (1-p)^2}.$$

Notar que la suma de las tres probabilidades anteriores da 1, como debe ser.

v) (1.2 ptos.) Suponga que en lugar de 3 máquinas hay infinitas máquinas funcionando como se describe arriba. Muestre que la probabilidad del suceso G : "ganar premio" es 1, expresando G en términos de los $G_i, i = 1, 2, \ldots$

Solución: Generalizamos la idea anterior suponiendo que $P(G_i) = p(1-p)^{i-1}, i = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces, si G es el suceso "ganar alguna vez", tenemos $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ y, aplicando la σ-aditividad dado que los sucesos son disjuntos, se tiene

$$P(G) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = 1.$$

P3. Una urna contiene cinco bolitas numeradas de 1 a 5. Suponga que se extraen dos bolitas al azar, una tras otra. Considere como espacio muestral el conjunto

$$\Omega = \{(i,j) \,:\, i, j \in \{1, \ldots, 5\}\}.$$

Se define la variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ como $X((i,j)) = i + j$

(a) Suponga que la extracción es **sin** reposición.

i) (1 pto.) Defina una probabilidad P sobre los subconjuntos de Ω que refleje apropiadamente las condiciones del experimento. ¿Es equiprobable el espacio de probabilidad resultante?

Solución: Aquí debemos notar que los pares de números repetidos no pueden aparecer porque estamos seleccionando bolitas sin reposición. Sin embargo Ω incluye pares de numeros iguales, a los cuales debemos asignar la probabilidad 0. Al resto de los pares (de coordenadas distintas) les asignamos igual probabilidad y dado que son $5 \cdot 4 = 20$, la probabilidad para cada uno será $1/20$. Este no es entonces un espacio equiprobable. Si hubiéramos desechado los pares con iguales coordenadas tendríamos un espacio equiprobable.

ii) (0.5 ptos.) Determine el conjunto E de los valores que puede tomar X.

Solución: En principio X puede tomar cualquier valor entre 2 y 10 pero si nos atenemos a los valores que toma con probabilidad positiva debemos restringirnos al conjunto $E = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

iii) (1.5 ptos.) Determine la probabilidad de que la variable X tome el valor k, con $k \in E$.

Solución: Buscamos en cada caso las preimágenes de los sucesos $\{k\}$, para $k \in E$, y calculamos sus probabilidades:

$$X^{-1}(\{3\}) = \{(1,2),(2,1)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 2/20,$$

$$X^{-1}(\{4\}) = \{(1,3),(3,1)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 2/20,$$

$$X^{-1}(\{5\}) = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 4/20,$$

$$X^{-1}(\{6\}) = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 4/20,$$

$$X^{-1}(\{7\}) = \{(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 4/20,$$

$$X^{-1}(\{8\}) = \{(3,5),(5,3)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 2/20,$$

$$X^{-1}(\{9\}) = \{(4,5),(5,4)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 2/20.$$

(b) Suponga que la extracción es **con** reposición.

iv) (1 pto.) Defina una probabilidad P sobre los subconjuntos de Ω que refleje apropiadamente las condiciones del experimento. ¿Es equiprobable el espacio de probabilidad resultante?

Solución: La situación en este caso es más simple porque todos los pares de números pueden salir con probabilidad positiva. El espacio resulta equiprobable y dado que tiene 25 elementos, a cada uno de ellos se le asigna la probabilidad $1/25$.

v) (0.5 ptos.) Determine el conjunto E de los valores que puede tomar X. **Solución:** Simplemente E es el conjunto de los enteros entre 2 y 10.

vi) (1.5 ptos.) Determine la probabilidad de que la variable X tome el valor k, con $k \in E$. **Solución:** Hacemos como en la parte (a), buscando las preimágenes y calculando las probabilidades:

$$X^{-1}(\{2\}) = \{(1,1)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 1/25,$$

$$X^{-1}(\{3\}) = \{(1,2),(2,1)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 2/25,$$

$$X^{-1}(\{4\}) = \{(1,3),(3,1),(2,2)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 3/25,$$

$$X^{-1}(\{5\}) = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 4/25,$$

$$X^{-1}(\{6\}) = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 5/25,$$

$$X^{-1}(\{7\}) = \{(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 4/25,$$

$$X^{-1}(\{8\}) = \{(3,5),(5,3),(4,4)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 3/25,$$

$$X^{-1}(\{9\}) = \{(4,5),(5,4)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 2/25,$$
$$X^{-1}(\{10\}) = \{(5,5)\} \quad \text{con probabilidad} \quad 1/25,$$

Tiempo: 2 horas y 30 minutos