Clase #6 Probabilidades y Estadística
3 de abril

Dos variables aleatorias

Consideremos un espacio muestral Ω y una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ sobre este espacio muestral. Supongamos que se tienen dos variables aleatorias $X : \Omega \to \mathbb{R}$ y $Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Estas dos variables aleatorias inducen una **probabilidad conjunta** sobre $\mathbb{R}^2$. En particular, se puede definir sobre el producto cruz de los recorridos de ambas variables, $R_X \times R_Y \subseteq \mathbb{R}^2$. Así, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se denotará

$$\mathbb{P}_{XY}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\}).$$

Independencia de v.a.

Si el resultado que toma la variable X no afecta el resultado que toma la variable Y y viceversa, diremos que las dos variables son independientes. Es decir, si se sabe que $X(\omega) \in A \subseteq \mathbb{R}$, entonces no se debería ver afectada la posibilidad de que $Y(\omega) \in B \subseteq \mathbb{R}$. Por lo tanto, en términos de probabilidades se debería tener que:

$$\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in A\} | \{\omega : Y(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in A\})$$
$$\mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) \in B\} | \{\omega : X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(\{\omega : Y(\omega) \in B\})$$

Es decir, los eventos $\{\omega : X(\omega) \in A\}$ y $\{\omega : Y(\omega) \in B\}$ deben ser independientes, para cualquier conjunto $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Un argumento técnico nos permite considerar sólo conjuntos A y B que sean semiintervalos, es decir, de la forma $(-\infty, c]$, con $c \in \mathbb{R}$.

Esto motiva la siguiente definición:

Definición: Dado un conjunto de variables aleatorias X_1, X_2, X_n, es decir, $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, diremos que son variables aleatorias independientes si los eventos

$$A_i = \{\omega : X_i(\omega) \in (-\infty, c_i]\}, \quad \forall i = 1, ..., n, \ \forall c_i \in \mathbb{R}$$

son independientes.

Ejemplos

Un experimento aleatorio consiste en lazar una moneda 2 veces, de manera independiente.

1. Consideremos las siguientes variables aleatorias:

   X : Cantidad de caras que salen en los 2 lanzamientos.

   Y : Cantidad de sellos que salen en los 2 lanzamientos.

   Las variables X y Y NO son independientes. Para ver esto hecho de manera rigurosa, consideremos $\Omega = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$ equiprobable.

$$R_X = \{0, 1, 2\}, \quad R_Y = \{0, 1, 2\}$$

$$\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}(\{(c, s), (s, c)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}_Y(\{1\}) = \mathbb{P}(\{(c, s), (s, c)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Sin embargo,

$$\mathbb{P}_{XY}(\{(1,1)\}) = \mathbb{P}(\{(c,s),(s,c)\}) = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}_X(\{1\})\mathbb{P}_Y(\{1\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2. Consideremos las siguientes variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{Sale cara en el primer lanzamiento} \\ 0 & \text{Sale sello en el primer lanzamiento} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{Sale cara en el segundo lanzamiento} \\ 0 & \text{Sale sello en el segundo lanzamiento} \end{cases}$$

Es fácil ver que X y Y SON independientes. Consideremos por ejemplo

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)^1.$$

Proposición: Consideremos $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a. y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones. Si X e Y son v.a. independientes, entonces $f(X)$ y $g(Y)$ son v.a. independientes.

Dem. Dados $A,B\subseteq\mathbb{R}$, basta notar que:

$$[f(X)]^{-1}(A) = \{x\in\Omega : f(X(\omega))\in A\} = \{x\in\Omega : X(\omega)\in f^{-1}(A)\},$$

$$[g(Y)]^{-1}(B) = \{x\in\Omega : g(Y(\omega))\in B\} = \{x\in\Omega : Y(\omega)\in g^{-1}(B)\},$$

Como X es independiente a Y, se tendrá que

$$\mathbb{P}(\{X(\omega)\in f^{-1}(A)\}\cap\{Y(\omega)\in f^{-1}(B)\}) = \mathbb{P}(\{X(\omega)\in f^{-1}(A)\})\mathbb{P}(\{Y(\omega)\in f^{-1}(B)\}).$$

Suma de v.a. discretas

Supongamos que tenemos 2 v.a. discretas. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $R_X = R_Y = \mathbb{Z}$[2] Se define una nueva v.a. $Z = X+Y$. Se desea determinar la distribución de probabilidades de Z. Claramente $R_Z = \mathbb{Z}$. Luego, dado $z\in\mathbb{Z}$ se quiere determinar

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Z(\{z\}) &= \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : Z(\omega)=z\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : X(\omega)+Y(\omega)=z\}) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\omega\in\Omega : X(\omega)=k\}\cap\{\omega\in\Omega : Y(\omega)=z-k\}\right) \end{aligned}$$

De acá se ve inmediatamente que si las v.a. X y Y son independientes se tiene lo siguiente:

$$\mathbb{P}_Z(\{z\}) = \mathbb{P}(Z=z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega : X(\omega)=k\}\right)\cdot\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega : Y(\omega)=z-k\}\right)$$

[1] Esta notación es la notación usual en probabilidades. Para los ejercicios dejaremos la notación formal conjuntista por una notación más práctica

[2] Siempre se puede establecer una biyección entre R_X y un subconjunto de $\mathbb{Z}$. Luego, a todos los enteros que no pertenezcan al recorrido de dicha biyección se les asigna probabilidad cero.