Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidades y Estadística 09-1

GUÍA EJERCICIOS # 1

Raúl Gouet, Jorge Lemus.

P1. Probar que
$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

P2. Considere un grupo de 20 personas. Si cada persona saluda de la mano al resto, ¿Cuántos saludos se producen?

P3. Una empresa cuenta con 15 trabajadores: 5 ingenieros y 10 técnicos. La empresa produce 2 tipos de productos A y B. El producto A requiere 3 ingenieros y 6 técnicos. El producto B requiere 2 ingenieros y 4 técnicos. ¿ De cuántas maneras se pueden asignar los puestos de trabajo en la empresa ?

P4. 12 personas se reparten en 3 comités de tamaños 3, 4 y 5 respectivamente. ¿ De cuántas maneras se pueden formar los comités?

P5. En una fiesta hay 12 hombres y 15 mujeres. ¿ De cuántas maneras se pueden escoger de entre ellos 4 pares (heterosexuales) para bailar?

P6. En un instituto de investigación científica trabajan 67 personas. De éstas, 47 hablan inglés, 35 alemán y 23 ambos idiomas. Si se escoge una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que no hable inglés ni alemán?

P7. ¿De cuántas formas se pueden escoger dos fichas de dominó, de modo que ambas se puedan juntar de alguna manera?

P8. 8 chocolates idénticos se reparten entre 4 niños. ¿ Cuántas reparticiones distintas son posibles? ¿ Cuántas son posibles si todos los niños deben recibir al menos 1 dulce?

P9. ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar n personas en una mesa redonda?

P10. Se realizan 2 experimentos. El primero tiene m resultados posibles. Si el primero ocurre de la manera i, entonces el segundo puede ocurrir de n_i maneras, $i = 1, ..., m$. ¿ De cuántas maneras pueden ocurrir los 2 experimentos?

P11. Un tren, en el que se encuentran n pasajeros, debe efectuar m paradas. ¿De cuántos modos pueden distribuirse los pasajeros entre estas paradas, suponiendo que todos bajan del tren?

P12. ¿ De cuántas maneras se pueden distribuir n bolitas idénticas dentro de r urnas distinguibles, de manera que en la urna i-ésima hayan al menos m_i bolitas? (Suponga que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \leq n$).

P13. Un dado se lanza hasta que aparezca el número 6, momento en el cual se detiene el experimento.

(a) Defina un espacio muestral Ω adecuado para el experimento.

(b) Considere el evento o suceso E_n, para denotar que fueron necesarios n lanzamientos antes de obtener el primer 6.

(c) ¿Qué elementos de Ω pertenecen a E_n?.

(d) ¿Qué representan los eventos o sucesos $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n$ y $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n\right)^c$?

P14. Considere un conjunto S. Una partición de tamaño k de S, es un conjunto $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ tal que $S_i \subseteq S$, $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = S$ y $S_i \bigcap S_j = \phi$ para $i \neq j$. Denotamos T_n el número de particiones posibles para el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Compruebe, encontrando todas las particiones posibles, que $T_3 = 5$ y $T_5 = 15$. Demuestre que:

$$T_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T_k.$$

P15. Determine el número de vectores $(x_1, \ldots, x_n)$ tales que $x_i \in \{0, 1\}$ y además

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k, \quad k \leq n.$$

P16. Un domador de fieras quiere sacar a la arena del circo ℓ leones y t tigres, indistinguibles. Un tigre no puede ir detrás de otro tigre. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las fieras?

P17. n niños caminan en una fila. Estos decidieron cambiar de lugar, de forma tal que delante de cada uno quede otro distinto del que había antes. ¿De cuántas maneras pueden efectuar esto?

P18. En el kiosko de la esquina hay una cola de $m + k$ personas; m de ellas tienen billetes de \$ 1000, y k, monedas de \$ 500. Todos compran una bebida que vale \$ 500. Son las 7:30am y la caja del kiosko está vacía. ¿De cuántas maneras se pueden formar las personas para que la cola pase sin contratiempos, es decir, que nadie deba esperar su vuelto?

P19. Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen n turnos de noche y n turnos de día. De los $2n$ trabajadores, $0 < a < n$ prefieren de noche y $0 < b < n$ prefieren de día. El resto de los trabajadores están indiferentes entre trabajar de noche o de día. Si los turnos se reparten al azar, determine la probabilidad de que a cada persona le corresponda el turno que quería.

P20. Dado $n \in \mathbb{N}$ se define $F_n = \{f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} \,/\, f \text{ es función}\}$.

Sea $A_k = \{f \in F_n \,/\, |i \in \{1, ..., n\}/f(i) = i\}| = k\}$. Es decir, el conjunto A_k contiene funciones para las que $f(i) = i$ para k puntos $i \in \{1, ..., n\}$.

Sea $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

(a) Pruebe que $|A_k| = \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$ y concluya que $|A| = n^n - (n-1)^n$.

(b) Se escoje una función al azar en F_n. Calcular la probabilidad de que esa función tenga exactamente k puntos fijos, es decir, que pertenezca a A_k.

(c) Calcular p_n, la probabilidad de escoger al azar una función con algún punto fijo.

(d) Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{e-1}{e}.$$