Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Guía para exámen MA3403

Profesor: Servet Martínez, Auxiliares: Gonzalo Contador, Francisco Unda.

Esta guía contiene problemas de la última materia vista en clases: distribuciones conjuntas y condicionales absolutamente contínuas, y estadística. Sin embargo, la materia a evaluar en el exámen será toda la materia vista en el curso.

P1. Sean X e Y variables aleatorias absolutamente contínuas. Se sabe que X sigue una distribución exponencial de parámetro 1, y que la densidad condicional de Y dado X está dada por $f_{Y|X}(y \mid x) = e^{x-y}$ para $y > x$, y 0 en caso contrario. Calcule:

a)$f_{X|Y}(x \mid y)$.
b)$\mathbb{E}(X \mid Y)$.
c)$\mathbb{E}(Y)$

P2. Sean X, Y, Z variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f(x,y,z) = 2e^{-x-2y}$$

donde $x, y > 0$, $z \in [0,1]$.

a) Muestre que las 3 variables son independientes, y explicite su distribución.
b) Calcule $\mathbb{P}(\frac{Y}{Z} > 1)$ y $\mathbb{E}(XYZ^2)$.

P3. En un ascensor con capacidad para k personas, se suben en cada viaje un número de personas entre 1 y k de manera equiprobable. Cada persona se baja en uno de N pisos de manera equiprobable e independiente de los otros pasajeros. Considerando $N > k$, calcule el valor esperado de paradas realizadas por el ascensor en cada viaje. (Hint: condicione respecto a la cantidad de pasajeros y calcule las esperanzas condicionales asociadas)

P4. Sea $\hat{\theta}$ el estimador de máxima verosimilitud de un parametro θ, y $g : \Omega \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función biyectiva y contínua. Muestre que $g(\hat{\theta})$ es el estimador de máxima verosimilitud de $g(\theta)$.*(Nota: este resultado se conoce como propiedad de invarianza del estimador de máxima verosimilitud)*

P5. Considere $X_1 ... X_n$ muestra aleatoria simple de $X \sim Uniforme(\theta, \theta + 1)$. Explicite, en función de los valores muestrales, el dominio donde la función de verosimilitud es distinta de cero. Imponga condiciones sobre los valores muestrales para que el estimador de máxima verosimilitud exista, y para que éste sea único.

P6. Sea $X_1...X_n$ muestra aleatoria simple de $X \sim Uniforme(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$.

a) Si σ es conocido, muestre que $\sum X_i$ es un estadístico suficiente para μ. Calcule el estimador de máxima verosimilitud en este caso y muestre que es insesgado.

b) Si μ es conocido, muestre que $\sum(X_i - \mu)^2$ es un estadístico suficiente para σ^2. Calcule el estimador de máxima verosimilitud en este caso y muestre que es insesgado. (Hint: puede serle útil calculaar un estimador para σ y utilizar el resultado de la P4)

c) Calcule el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\sigma^2}$ para σ^2 en el caso en que μ es desconocido. Muestre que en este caso $\hat{\sigma^2}$ es sesgado y que $\frac{n}{n-1}\hat{\sigma^2}$ es insesgado. Compare la varianza de ambos estimadores.

P7. Considere $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$ y $\overline{X}$ la media muestral obtenida a partir de una muestra de tamaño n. Muestre que el intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ de largo mínimo para el parámetro desconocido μ tiene la forma $I = [\overline{X} - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}]$, donde z es tal que $\mathbb{P}(Y > z) = \frac{\alpha}{2}$ para $Y \sim Normal(0, 1)$

P8. Muestre que, si $\hat{\beta}$ es estimador insesgado de β obtenido con una muestra de tamaño n, entonces $\hat{\beta}$ es consistente si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{V}ar(\hat{\beta}) = 0$. (Hint: Utilice las desigualdades de Tchebychev y Markov)