Guía para Control 3 MA34-A

Profesor: Servet Martínez. Profesores Auxiliares: Andrés Fielbaum, Tomas Spencer

P1

Sea X variable aleatoria estrictamente positiva, y sea también $r > 0$. Pruebe que $P(X > r) < \frac{E(X)}{r}$. Pruebe además que si Y es variable aleatoria, tal que $P(Y = E(Y)) = 0$, entonces para todo $r > 0$, $P(|Y - E(Y)| > r) < \frac{Var(Y)}{r^2}$.

P2

Sean X_i $i = 1, ..., n$ variables aleatorias independientes, tales que $X_i \sim Binomial(n, p_i)$ para todo $i = 1, ..., n$. Sea $r > 0$, y defina $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu = \mathbb{E}(X)$. En este problema probaremos que dado $t > 0$, $\mathbb{P}(X \geq (1+r)\mu) \leq \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(1+r)\mu}}$ $(\triangle)$.

i) Pruebe que $\forall i = 1, ...n$, $\mathbb{E}(e^{tX_i}) =(1 + p_i(e^t - 1))^n$.

Ahora, dado que $(1 + x) < e^x$, se tiene que (puede usarlo, no necesita probarlo) que $\mathbb{E}(e^{tX_i}) \leq e^{np_i(e^t-1)}$

ii) Pruebe que $\mathbb{P}(X \geq (1 + r)\mu) \leq \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_i})}{e^{t(1+r)\mu}}$. Hint: Note que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq b \Leftrightarrow e^{ta} \geq e^{tb}$.

iii) Concluya la desigualdad $(\triangle)$. Hint: Recuerde que si $Y \sim Binomial(m, q)$, entonces $\mathbb{E}(Y) = mq$.

P3

i) Sea X variable aleatoria con distribución $Bernouilli(p)$. Calcule su función generadora de momentos $\phi_X(u)$, su transformada de Laplace $\psi_X(s)$ ó su función característica $\varphi_X(t)$ (sólo una de las tres).

ii) Demuestre, utilizando la transformada que haya escogido, que si $X_1, .., X_n$ son n variables aleatorias independientes, todas con distribución $Bernouilli(p)$, entonces $\sum_{k=1}^{n} X_k \sim Binomial(n, p)$.

P4

Sea X variable aleatoria absoultamente continua, con función de densidad: $f_X(x) = \begin{cases} x^2 & si\, 0 < x < a \\ 0 & si\, no \end{cases}$

i) Calcule el valor de a

ii) Calcule $E(X), Var(X)$

P5

Sea X variable aleatoria a valores en $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3...\}$, tal que $P(X = k) = 2^{-k} \forall k \in \mathbb{N}^*$.

i) Muestre que $P(X \in \mathbb{N}^*) = 1$ (i.e., que lo recién definido está, de hecho, bien definido)

ii) Calcule *E(X), Var(X)*
iii) Muestre que si Y=2^X, entonces *E(Y)*=$+\infty$

P6

Sea Q una variable aleatoria abs. continua a valores en $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (el borde del disco unitario en $\mathbb{R}^2$, con densidad uniforme, es decir, $f_Q(x, y) = \frac{1}{2\pi} \forall (x, y) \in S$. Sea d un punto arbitario en S. Defina $X = ||Q - d||$. Calcule *E(X)*.

P7

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, con la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)} & si\, x \geq a \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Donde $a \geq 0$ es una constante (esta función se conoce como distribución exponencial de dos parámetros).
i) Calcule la transformada de Laplace $\psi_X(t)$.
ii) Deduzca $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$.

P8

Sea X variable aleatoria absolutamente continua, con función de densidad de probabilidad dada por $f_X(x) = \frac{\alpha}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R}$.
i) Calcule el valor de α
ii) Muestre que X no tiene esperanza definida en los reales.

P9

El valor que toma el vector aleatorio *(X,Y)* se elige mediante dos sorteos sucesivos. Primero se elige el valor de X sorteando un entero al azar entre 1 y 10 (ambos inclusive), con la ley de probabilidad equiprobable. Después se elige el valor de Y sorteando un entero al azar entre 1 y X (ambos inclusive), con la ley de probabilidad equiprobable.
i) Encuentre la función de densidad de probabilidad $p_{X,Y}(x, y)$.
ii) Encuentre la función de densidad marginal de probablidad de Y $p_Y(y)$.
iii) Calcule la esperanza condicional $E(Y|X = x)$ en función de x.
iv) Encuentre la función de densidad condicional $p_{X|Y}(x|y)$, y calcule $E(X|Y = y)$.

P10

Sean $X \sim Binomial(n, p)$, $Y \sim Binomial(n, q)$. Calcule la función de densidad de probabilidad $p_{X+Y}(l|k)$, donde k es un natural entre 0 y $2n$.

P11

Sean X, Y variables aleatorias independientes, ambas con esperanza y varianza finita. Muestre que *Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y).*

P12

Sea *(X,Y)* un vector aleatorio discreto, con función de densidad de probabilidad dada por:

$$P(X=0, Y=0) = \frac{1}{4},\ P(X=0, Y=1) = \frac{1}{4},\ P(X=1, Y=1) = \frac{1}{2}$$

i) Calcule las funciones de densidad de probabilidad $p_{X|Y}(x|0)$, $p_{X|Y}(x|1)$
ii) Calcule $\mathbb{E}(X|Y=1)$.

P13

Sea *(X,Y)* un vector aleatorio discreto a valores en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, con función de densidad dada por $p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{e^{-\lambda}y^x}{x!} & si\, y=2 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^x & si\, y=4 \\ 0 & \sim \end{cases}$

i) Calcule la densidad marginal $p_X(x)$
ii) Calcule la densidad marginal $p_Y(y)$
iii) Calcule la función de densidad condicional $p_{Y|X}(y,x)$
iv) Calcule $\mathbb{E}(Y|X=2)$