Universidad de Chile	Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Control 3, 06 de Noviembre de 2006

PROFESOR: SERVET MARTÍNEZ
AUXILIARES: BOLÍVAR DÍAZ L., FRANCISCO SILVA A.

P1.- Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k|x| & -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq x \\ 0 & \sim \end{cases}$$

donde k es una constante.

a) Encuentre k para que la función anterior sea efectivamente una densidad de probabilidad.
b) Encuentre $f_X(x)$.
c) Encuentre $f_Y(y)$.
d) Encuentre $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$

P2.- Sea X una varaiable aleatoria con media $\mu \neq 0$ y varianza $\sigma^2 > 0$. Definamos las siguientes cantidades:

$$r = \frac{|\mu|}{\sigma} \qquad D = \left| \frac{X - \mu}{\mu} \right| .$$

Muestre que para $\alpha > 0$ se tiene que

$$P(D \leq \alpha) \geq 1 - \frac{1}{r^2 \alpha^2} .$$

P3.- Sean X e Y variables aleatorias independientes distribuidas según Poisson de parámetros respectivos λ y ν.

i) Calcule la función generadora de momentos de la variable X y deduzca su esperanza y varianza.
ii) Calcule la función generadora de momentos de la variable $X + Y$ y deduzca que $X + Y$ es una variable aleatoria de Poisson de parámetro $\lambda + \nu$.

En el resto del ejercicio suponga que $\lambda = \nu$.

iii) Encuentre la función generadora de momentos de la variable $Z = X + 3Y$.
iv) Calcule la esperanza y la varianza de Z.

P4.- Pruebe, usando la Ley fuerte de los grandes números, que para $\varepsilon > 0$ dado, se cumple:

i) $\lim_{n \mapsto \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n(1+\varepsilon) \rfloor} \frac{n^k}{k!} = 1$
ii) $\lim_{n \mapsto \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n(1-\varepsilon) \rfloor} \frac{n^k}{k!} = 0$

donde $\lfloor x \rfloor$ indica el más grande de los enteros menores que x.

Ahora pruebe, usando el Teorema central del límite, que se verifica:

iii) $\lim_{n \mapsto \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$

Hint: Recuerde que (por 3 *ii*)) la suma de variables aleatorias de Poisson independientes, es una variable aleatoria de Poisson cuyo parámetro es la suma de los parámetros de las variables que se suman.

Tiempo: 2:15 horas. **Nota:** Todas las preguntas tienen igual valor.