

Pauta P2 Control 2.-

(a)

Sean $X \sim N(0, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$. Luego $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathbb{V}(X) = \sigma_X^2$ y $\mathbb{V}(Y) = \sigma_Y^2$.

Sea $Z_\lambda := \lambda X + (1 - \lambda)Y$, $\lambda \in [0, 1]$.

$$\bullet \mathbb{E}(Z_\lambda) \stackrel{def}{=} \mathbb{E}(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \stackrel{lineal}{=} \lambda \mathbb{E}(X) + (1 - \lambda) \mathbb{E}(Y) = \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda) \cdot 0 = 0. \quad 0.6$$

$$\bullet \mathbb{V}(Z_\lambda) = \mathbb{V}(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \stackrel{indep.}{=} \lambda^2 \mathbb{V}(X) + (1 - \lambda)^2 \mathbb{V}(Y) = \lambda^2 \sigma_X^2 + (1 - \lambda)^2 \sigma_Y^2. \quad 0.6$$

Derivando con respecto a λ , se obtiene: $\frac{\partial \mathbb{V}(Z_\lambda)}{\partial \lambda} = 2 \cdot \lambda \cdot \sigma_X^2 - 2 \cdot (1 - \lambda) \cdot \sigma_Y^2 \stackrel{!}{=} 0 \implies \lambda^* \cdot \sigma_X^2 - (1 - \lambda^*) \cdot \sigma_Y^2 = 0 \implies \lambda^* \cdot (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2) = \sigma_Y^2$

$\therefore$

$$\lambda^* = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \in [0, 1]$$

es tal que $\mathbb{V}(Z_{\lambda^*})$ es mínima. 0.5

El hecho de que sea mínimo viene de que $\mathbb{V}(Z_\lambda) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función convexa, en efecto: 0.3

$$\frac{\partial^2 \mathbb{V}(Z_\lambda)}{\partial \lambda^2} = 2 \sigma_X^2 + 2 \sigma_Y^2 \geq 0$$

(b1)

Sea $\{x_i\}_{i=1}^n$ el conjunto de los valores que alcanza X (i.e., $\{x_i\}_{i=1}^n = X(\Omega)$). Además $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_X(x_i)$ está bien definida (suma finita).

Forma 1: (Directo.)

Se tiene que $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_X(x_i) \stackrel{enun.}{=} 0$, pero $(x_i - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$ y $p_X(x_i) \geq 0 \forall i \in \{0, \dots, n\}$.

Luego se tienen sumandos no negativos que suman cero, entonces necesariamente estos deben ser nulos. Así $(x_i - \mathbb{E}(X))^2 = 0$ ó $p_X(x_i) = 0 \forall i \in \{0, \dots, n\}$. 0.5

Y por lo tanto $x \neq \mathbb{E}(X) \implies p_X(x) = 0$. 0.5

Además se debe tener que $\sum_{i=1}^n p_X(x_i) = 1$. 0.5

Como $p_X(x_i) = 0$ si $x_i \neq \mathbb{E}(X)$, entonces necesariamente $\mathbb{E}(X) \in X(\Omega)$ y $p_X(\mathbb{E}(X)) = 1$. 0.5

Así $X \equiv \mathbb{E}(X)$, constante.

Forma 2: (Contrareciproca.)

Supongamos que $\exists a, b \in X(\Omega)$, $a \neq b$ tales que $p_X(a), p_X(b) > 0$, i.e., X no es constante.

Entonces $\mathbb{V}(X) \geq (a - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_X(a) + (b - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_X(b)$, pero como $a \neq b$, al menos uno debe ser distinto de $\mathbb{E}(X)$. Sin pérdida de generalidad digamos $a \neq \mathbb{E}(X)$, luego $\mathbb{V}(X) \geq (a - \mathbb{E}(X))^2 \cdot p_X(a) > 0$. 0.5

Hemos demostrado entonces, X no constante $\implies \mathbb{V}(X) > 0$. 0.5

Luego $\mathbb{V}(X) = 0 \implies X$ constante. 0.5

(*) Por contradicción se razona de manera similar. 0.5

Forma 3: Desigualdad de Chebyshov (Tchebychev, Tchebycheff, Tschebyscheff o Čebišev).

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\epsilon^2}, \forall \epsilon > 0$$

Pero $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \stackrel{def}{=} \mathbb{V}(X) \stackrel{enun.}{=} 0$, de modo que $\forall \epsilon \geq 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq 0$, i.e., $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) = 0$.

Se concluye que $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \neq 0) = 0 \iff \mathbb{P}(X \neq \mathbb{E}(X)) = 0 \stackrel{\sum_{p=1}}{\iff} \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$. Y por lo tanto $X \equiv \mathbb{E}(X)$, constante.

(b2)

Dado que X, Y y X+Y tienen la misma distribución, entonces $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X + Y)$ (*) y $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X + Y)$ (**). Luego

$$\bullet \mathbb{E}(X + Y) \stackrel{\mathbb{E}^{lineal}}{=} \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \stackrel{(*)}{=} \mathbb{E}(X) \implies \mathbb{E}(Y) = 0 \stackrel{(*)}{=} \mathbb{E}(X). \quad 0.6$$

$$\bullet \mathbb{V}(X + Y) \stackrel{indep.}{=} \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) \stackrel{(**)}{=} \mathbb{V}(X) \implies \mathbb{V}(Y) = 0 \stackrel{(**)}{=} \mathbb{V}(X). \quad 0.8$$

$$\text{Luego por (b1) se concluye que } \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X) = 0) = 1 = \mathbb{P}(Y = 0). \quad 0.6$$

NOTA: Los puntajes al interior de cada parte de la pregunta son solo una referencia.