Pauta Control 1

P1

a)

Sabemos que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{B} \ \wedge \ (A_1 \cap A_2) \subseteq A_1$
$(A_1 \cap A_2) \subseteq A_2$
Luego por definición de átomo:
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 0 \ \vee \ \mathbb{P}\big(A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)\big) = 0$$
$$\text{y} \quad \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 0 \ \vee \ \mathbb{P}\big(A_2 \backslash (A_1 \cap A_2)\big) = 0$$
Notando que $\mathbb{P}\big(A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)\big) = \mathbb{P}(A_1 \backslash A_2)$ y poniendose en los posibles casos se concluye que:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 0 \ \vee \ \mathbb{P}(A_1 \triangle A_2) = 0$$

Obs:

La unión de 2 átomos no necesariamente es átomo.

b)

D no es átomo $\Rightarrow \exists \ B \in \mathcal{B}; \ \mathbb{P}(B) > 0 \ \wedge \ \mathbb{P}(D \backslash B) > 0$
Notamos que $D \backslash B \in \mathcal{B} \ \wedge \ (D \backslash B) \subseteq D$.
Luego,
$$\mathbb{P}(D \backslash B) + \mathbb{P}(B) = D$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(D \backslash B) \leq \tfrac{\mathbb{P}(D)}{2} \ \vee \ \mathbb{P}(B) \leq \tfrac{\mathbb{P}(D)}{2}$$
Así, el conjunto que buscamos es: $arg \min\limits_{A,B} \{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$

P3

a.1)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_k = 1 \ \wedge \ X_{k+1} = 0 \,|X_i = 0, \ i = 1, ..., j-1 \ \wedge \ X_i = 1, \ i = j, ..., k-1)\ \mathbb{P}(\%) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_k = 1)\ \mathbb{P}(X_{k+1} = 0)\ \mathbb{P}(X_i = 0, \ i = 1, ..., j-1)\ \mathbb{P}(X_i = 1, \ i = j, ..., k-1) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} p(1-p)(1-p)^{j-1} p^{k-j-1} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} p^{k-j}(1-p)^{j}
\end{aligned}
$$

a.2)

$\mathbb{P}(Y = k \,|Z = k) = \frac{\mathbb{P}(Y=k \ \wedge \ Z=k)}{\mathbb{P}(Z=k)} = \frac{\mathbb{P}(X_j=0 \ \forall j<k \ \wedge \ X_k=1 \ \wedge \ X_{k+1}=0)}{\mathbb{P}(Z=k)}$

Pero notemos que Z se comporta como una geométrica, por lo que: $\mathbb{P}(Z = k) = (1-p)^{k-1}p$.

Así:

$\mathbb{P}(Y = k \,|Z = k) = \frac{(1-p)^{k-1}p(1-p)}{(1-p)^{k-1}p} = 1 - p$

b)

$$
\mathbb{P}(X_i = 1 \ \forall i \in J, \ X_i = 0 \ \forall i \in J^c \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = k) = \frac{\mathbb{P}(X_i = 1 \ \forall i \in J \ \wedge \ X_i = 0 \ \forall i \in J^c \ \wedge \ \sum_{i=1}^{n} X_i = k}{\mathbb{P} \sum_{i=1}^{n} X_i = k}
$$

$$
= \frac{\mathbb{P}(X_i = 1 \ \forall i \in J)\ \mathbb{P}(X_i = 0 \ \forall i \in J^c)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)} = \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{1}{\binom{n}{k}}
$$