

## Pauta Pregunta 1 Control 1

### Parte a)

Como elijeremos dos puntos, y en forma independiente, tenemos  $n \cdot n = n^2$  maneras posibles de sacar, es decir  $n^2$  casos totales. Los casos favorables son todos aquellos donde el primer elemento es igual al segundo, y como hay  $n$  elementos distintos, entonces hay  $n$  parejas que me sirven, luego hay  $n$  casos favorables. Así, la probabilidad pedida vale  $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ .

### Parte b)

Lo haremos por probabilidades totales. Así,  $P(x \in B) = \sum_{k=0}^n P(x \in B \mid |B| = k) \cdot P(|B| = k)$ . Calculemos entonces el valor de estas probabilidades:

$P(x \in B \mid |B| = k) = \frac{k}{n}$ , simplemente porque  $x$  tiene  $k$  valores favorables sobre  $n$  posibles.

$P(|B| = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ , pues lo del numerador es la cantidad de conjuntos de tamaño  $k$  en las partes de  $A$ , y lo del denominador la cantidad total de elementos en  $\mathcal{P}(A)$ .

Así,  $P(x \in B) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ . (Ojo, que con llegar hasta acá ya tenían casi todo el puntaje). Lo anterior es igual a  $\frac{1}{n2^n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \frac{1}{n2^n} \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} \Big|_{x=1} = \frac{1}{n2^n} \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n x^k 1^{n-k} \binom{n}{k} \Big|_{x=1} = \frac{1}{n2^n} \frac{d}{dx} (1+x)^n \Big|_{x=1} = \frac{1}{n2^n} n(1+x)^{n-1} \Big|_{x=1} = \frac{1}{n2^n} n2^{n-1} = \frac{1}{2}$ .