

PAUTA PREGUNTA 3 CONTROL 1

Parte a)

Supongamos que no es cierto, es decir, $P(B_i) > \frac{1}{n} \forall i$. Tenemos entonces que:
 $1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i) > \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

Concluimos entonces que $1 > 1$, claramente una contradicción, que nace de suponer que lo que nos piden probar es falso.

Parte b)

También procederemos por contradicción. Supongamos entonces que $P(\{x\}) > 0$. Luego, por ser el espacio no atómico, debiese existir $C \subseteq \{x\}$ que cumple $0 < P(C) < P(\{x\})$. Pero como $\{x\}$ es un singleton, $C \subseteq \{x\} \Rightarrow C = \emptyset$ ó $C = \{x\}$. Pero $C = \emptyset \Rightarrow P(C) = 0 \not> 0$. Luego, el conjunto vacío no puede ser el C que andamos buscando. Por descarte entonces, la única opción que queda es $C = \{x\}$. Pero entonces $P(C) \not< P(\{x\})$, por lo que $\{x\}$ tampoco es el conjunto buscado. Así, no existe ese tal conjunto, lo que contradice el hecho de que el espacio sea no atómico. Se concluye entonces que $P(\{x\}) = 0$.

Veamos ahora que un espacio numerable con la σ -álgebra de las partes no puede ser no atómico. Supongamos que lo fuera. Sabemos que por ser numerable, entonces $1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{x \in \Omega} \{x\}) = \sum_{x \in \Omega} P(\{x\})$. Pero recién probamos que por ser no atómico, $P(\{x\}) = 0 \forall x \in \Omega$. Así, volviendo a lo que teníamos: $1 = \sum_{x \in \Omega} P(\{x\}) = \sum_{x \in \Omega} 0 = 0$. Es decir, concluimos que $1 = 0$, lo que claramente es una contradicción, que nace de suponer que el espacio numerable es no atómico.