CLASE AUXILIAR 3

ANDRÉS ITURRIAGA J. - HÉCTOR OLIVERO Q.

1. Repaso

En lo que sigue $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad.

1.1. Principio de Inclusión Exclusión.

$$(\forall A, B \subset \Omega) \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

1.2. Probabilidad condicional: Dados dos subconjuntos de Ω A y B tal que $\mathbb{P}(B) > 0$ se define la probabilidad condicional de A dado B como:

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$$

Esta noción captura como la ocurrencia de B incide en nuestro conocimiento acerca de la ocurrencia de A.

1.3. Regla de las probabilidades totales: Si $\{A_i\}_{i \in I}$ con I un conjunto numerable, es una partición de Ω entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}(\forall A \subset \Omega) \ \mathbb{P}(A) &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(AA_I) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A/A_I)\mathbb{P}(A_i)\end{aligned}$$

La idea de esta regla es que si Ω lo divido en trozos disjuntos, el "area" de un subconjunto A de Ω la puedo calcular como la suma de las areas de las intersecciones de A con los trozos disjuntos.

1.4. Teorema de Bayes: Dados dos conjuntos A y B de probabilidad no nula, entonces:

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

En particualar si tenemos una partición numerable $\{A_i\}_{i \in I}$ se tiene que:

$$\mathbb{P}(A_i/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A/A_I)\mathbb{P}(A_i)}$$

1.5. Independencia. La familia $\{A_i\}_{i \in I}$ será independiente si $(\forall J \subset I, |J| < \infty)$:

$$\mathbb{P}(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

2. Problemas

Problema 1:

Se trata del concurso de Monty Hall que consiste en lo siguiente: El concursante se encuentra frente a tres puertas, una de las cuales esconde un premio. El concursante elige una puerta y el animador abre una de las otras dos y muestra que alli no está el premio y le ofrece al concursante cambiarse. ¿Qué es lo que debe hacer el concursante?

Solución:
Si el concursante no se cambia la probabilidad de ganar es 1/3.
Analicemos que es lo que pasa cuando el concursante se cambia de puerta, para esto definamos los siguientes eventos:
F: El premio está detras de la primera puerta escogida por el concursante.
E: El concursante gana.
Por regla de probabilidades totales (en su forma condicional) tenemos que:

$$\mathbb{P}(E) = \underbrace{\mathbb{P}(E/F)}_{0}\mathbb{P}(F) + \underbrace{\mathbb{P}(E/F^c)}_{1}\underbrace{\mathbb{P}(F^c)}_{2/3} = \frac{2}{3}$$

Obs:$\mathbb{P}(E/F) = 0$ porque me cambio de puerta.

Problema 2:

Una bola roja está en una de entre n urnas, las cuales contienen además bolas blancas. La probabilidad de que la bola roja se encuentre en la i-ésima urna es p_i. Mientras que la probabilidad de sacar la bola roja al realizar una extracción en la i-ésima urna es a_i.¿Cuál es la probabilidad de que la bola roja esté en la urna j dado que una búsqueda en la i-ésima urna fracasó?

Solución:
Definamos los eventos:
$E_j =$ La bola está en la urna j.
$B_i =$ La búsqueda en la urna i no tuvo éxito.
Nos piden calcular $\mathbb{P}(E_j/B_i)$. Utilizaremos Bayes:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_j/B_i) &= \frac{\mathbb{P}(B_i/E_j)\mathbb{P}(E_j)}{\mathbb{P}(B_i)} \\ &= \begin{cases} \frac{(1-a_i)p_i}{\mathbb{P}(B_i)} & j = i \\ \frac{p_j}{\mathbb{P}(B_i)} & j \neq i \end{cases}\end{aligned}$$

Solo falta calcular la probabilidad de B_i para esto utilizaremos regla de probabilidades totales y $\sum p_j = 1$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_i) &= \sum_j \mathbb{P}(B_i/E_j)\mathbb{P}(E_j) \\ &= (1-a_i)p_i + \sum_{j\neq i} p_j \\ &= p_i - a_i p_i + \sum_{j\neq i} p_j \\ &= 1 - a_i p_i\end{aligned}$$

Con lo que se concluye el problema.

Problema 3:

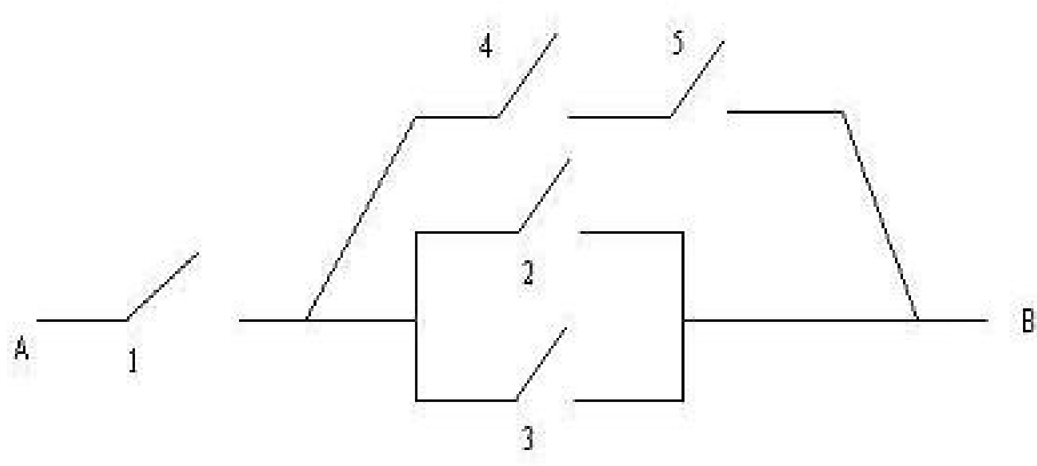
Corresponde al problema 2 del control 1 del semestre de primavera 1998, que pueden encontrar en la siguiente dirección:

http://www.dim.uchile.cl/ mkiwi/ma34a/99-1/

En la sección circulares, controles y pautas.

Problema 4:
Suponga que los interruptores de la figura se comportan de manera independiente y que la probabilidad p de que un interruptor esté cerrado es igual para todos.

Figura 1. Circuito Eléctrico.



1. ¿Cuál es la probabilidad de que fluya corriente de A a B?
2. Dado que fluye corriente de A a B¿Cuál es la probabilidad de que 2 esté abierto?

Solución:
Definamos los eventos:
F: Fluye corriente de A a B.
C_i: El interruptor i está cerrado.
Entonces: $\mathbb{P}(C_i) = p$ y $\{C_i\}_{i=1}^5$ es una familia independiente. Notemos además que:

$$F = C_1(C_4C_5 \cup C_2 \cup C_3)$$

Para responder (1) tenemos que calcular $\mathbb{P}(F)$ y para (2) $\mathbb{P}(C_2^c/F)$. Calculemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(C_1(C_4C_5 \cup C_2 \cup C_3)) \\
&= \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_4C_5 \cup C_2 \cup C_3) \\
&= p(1 - \mathbb{P}((C_4^c \cup C_5^c)C_2^cC_3^c)) \\
&= p(1 - \mathbb{P}(C_4^c \cup C_5^c)(1-p)^2) \\
&= p(1 - (1 - \mathbb{P}(C_4C_5))(1-p)^2) \\
&= p(1 - (1-p^2)(1-p)^2) \\
&= p^2(2 - 2p^2 + p^3)
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\mathbb{P}(C_2^c/F) = \frac{\mathbb{P}(C_2^cF)}{\mathbb{P}(F)}$$

Pero como ya conocemos $\mathbb{P}(F)$ basta calcular $\mathbb{P}(C_2^cF)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_2^cF) &= \mathbb{P}(C_1(C_4C_5 \cup C_3)C_2^c) \\
&= p\mathbb{P}(C_4C_5 \cup C_3)(1-p) \\
&= p(1-p)(\mathbb{P}(C_4C_5) + \mathbb{P}(C_3) - \mathbb{P}(C_3C_4C_5)) \\
&= p(1-p)(p^2 + p - p^3)
\end{aligned}$$

Con lo que se concluye.