

Control 3 MA 26A, 2007, M. Kowalczyk

1.

(a) Sea $X(t)$ la matriz fundamental del sistema lineal :

$$X' = A(t) \cdot X \quad \text{donde } A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}.$$

(Las columnas de $X(t)$ son soluciones linealmente independientes del sistema, y $X(0) = I$.) Sea $W(t) = \det X(t)$ el Wronskiano de $X(t)$. Demuestre que $W(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dt} = [a_{11}(t) + a_{22}(t)]W.$$

(b) Demuestre la formula de Liouville

$$W(t) = e^{\int_{t_0}^t [a_{11}(s) + a_{22}(s)] ds} W(t_0).$$

2.

(a) Encuentre la solución general del sistema lineal

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y, \\ y' &= 3x + 2y. \end{aligned}$$

(b) Demuestre que

$$x(t) = 3t - 2, y(t) = -2t + 3,$$

es una solución particular del sistema

$$(1) \quad \begin{aligned} x' &= x + 2y + t - 1, \\ y' &= 3x + 2y - 5t - 2. \end{aligned}$$

(c) Encuentre la solución general del sistema (1).

3. Dibuje el diagrama de fase correspondiente a las siguientes ecuaciones.

(a) $x'' + x' + x = 0.$

(b) $x'' + x' - x(1 - x) = 0.$