2.(a)

Conjunto fundamental: $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$ (1.0)

Método de coeficientes indeterminados

$y_{p1}(x) = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$ ($\cos 2x$ es una solución de la ecuación homogénea)

$$y_{p1}'' = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x$$
$$-4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x$$

$$y_{p1}'' + 4y_{p1} = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 2\cos 2x$$

$$\Rightarrow A = 0, \quad B = \frac{1}{2}$$ (1.0)

$$y_{p2}(x) = A\sin x + B\cos x$$
$$y_{p2}'' = -A\sin x - B\cos x$$
$$(-A + 4A)\sin x + (-B + 4B)\cos x = \sin x$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}, \; B = 0$$ (1.0)

Principio de superposición

$$y(x) = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$$

2.(b) sea $\phi(x)$ una solución de

$$\phi'' + k^2\phi = f(x)$$

Variación de parámetros ok.

definimos: $y_k(x) = \phi(k^{-1}x)$, $f_k(x) = k^{-2} f(k^{-1}x)$

$$\Rightarrow y_k''(x) = k^{-2}\phi''(k^{-1}x) = -\phi(k^{-1}x) + k^{-2}f(k^{-1}x)$$
$$= -y_k(x) + f_k(x)$$

$$\Rightarrow y_k'' + y_k = f_k(x) \Rightarrow y_k(x) = \int_0^x f_k(t)\sin(x-t)\,dt$$

$$\Rightarrow \phi(k^{-1}x) = \int_0^{k^{-1}x} k^{-1} f(s)\sin k(k^{-1}x - s)\,ds \Rightarrow \phi(x) = \frac{1}{k}\int_0^x f(t)\sin[k(x-t)]\,dt$$