Guía N^{o}3 Ma26a-01 2006-1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Prof. Manuel del Pino; Auxs.: Andrés Contreras - Claudio Muñoz

Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM - U. de Chile

1. Método de Coeficientes Indeterminados. Ecuaciones de Orden Superior

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden, por el método de *coeficientes indeterminados*.

   a) $y'' + y' = x^2 \sin x$.

   b) $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$.

   c) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$, con $x > 0$.

   d) $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4 \sin x$.

   e) $y'' + 8y = 5x + 2e^{-x}$.

   f) $y'' - 2y' + y = 10e^{-2x} \cos x$.

2. Encuentre las soluciones de los siguientes problemas de orden superior.

   a) $y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0$.

   b) $y^{(iv)} + 2y'' + y = 0$.

   c) $y''' - 3y'' + 4y = xe^{2x} - \cos x$.

   d) $y^{(iv)} + 8y'' + 16y = \cos^2 x$.

   e) $y''' - 6y'' - 11y' - 6y = e^{4x}$.

   f) $x^3 y''' + 3x^2 y'' - xy' + y = 0$.

3. Considere la ecuación de tercer orden

$$y''' + ay'' + by' + cy = e^{ux} \tag{1}$$

donde a, b, c, u son constantes reales o complejas. Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de esta ecuación. Muestre que si u es tal que $p(u) = 0,\ p'(u) \neq 0$ entonces (1) posee una solución particular

$$y(x) = \frac{1}{p'(u)} x e^{ux} \ .$$

4. (a) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = 4e^{2x} + 2e^{x}\cos x \ .$$

(b) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = \frac{e^x}{\cos x}, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ .$$

2. Problemas de Valor de Frontera

5. Considere el problema de condiciones de borde

$$y'' + p(x)y = g(x) \quad x \in [a,b] \ ,$$
$$y(a) = y(b) = 0 \ ,$$

donde p, g son funciones continuas en $[a,b]$. Demuestre que si $p(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces este problema posee solución y ésta es única.

Ind.: Cuando $g \equiv 0$, multiplique la ecuación por y y realice una integración por partes.

6. Sea $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere el problema de valores de frontera

$$y'' + y = f(x), \ x \in]0,\pi[, \ y(0) = y(\pi) = 0. \tag{2}$$

Demuestre que (2) tiene solución si y sólo si

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)dx = 0. \tag{3}$$

7. (a) Considere el problema de condiciones de borde de cuarto orden

$$y^{(iv)} + p(x)y = g(x), \quad x \in [0,1] \ , \tag{4}$$
$$y(0) = y''(0) = 0 = y''(1) = y(1) \tag{5}$$

donde p y g son funciones continuas en $[0,1]$. Suponga que este problema para $g \equiv 0$ tiene sólo la solución $y \equiv 0$. Demuestre entonces que existe una única solución de (4)-(5) para cualquier función g continua en $[0,1]$.

(b) Considere el problema

$$y^{(iv)} - \alpha^4 y = g(x), \quad x \in [0,1] \ ,$$
$$y(0) = y''(0) = 0 = y''(1) = y(1).$$

Muestre que si $\alpha \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces este problema tiene solución única para cualquier función g continua en $[0,1]$.

8. *Principio del Máximo*. Considere el problema de condiciones de borde de segundo orden en $[0,1]$:

$$y'' + a(x)y' + b(t)y = f(x), \quad y(0) = \alpha, \ y(1) = \beta. \tag{6}$$

donde a, b, f son funciones continuas en $[0,1]$, y α, β constantes reales dadas. Supongamos que $b(x) < 0$ para todo $x \in [0,1]$ y que existe solución $y \in \mathcal{C}^2([0,1])$ de (6).

(a) Muestre que si $f \leq 0$ en $[0,1]$ y $\alpha, \beta \geq 0$, entonces $y \geq 0$ en $[0,1]$. *Ind.:* Suponga, por contradicción, que el punto x_0 donde y se minimiza es tal que $y(x_0) < 0$. Entonces $x_0 \in]0,1[$ (¿Por qué?). Use que la ecuación se satisface en x_0 para concluir una contradicción.

(b) Pruebe que existe *a lo más* una solución de (6) (Recuerde que el Teorema de Existencia y Unicidad para EDOs de segundo orden lineales vale sólo para problemas de condiciones iniciales y no para condiciones de borde).

9. (a) *Primer valor propio del Laplaciano en dimensión uno.* Demuestre que las soluciones (λ, ϕ) *no triviales* de la siguiente EDO de segundo orden lineal:

$$-\phi'' = \lambda\phi; \quad \phi(0) = \phi(1) = 0.$$

están dadas (salvo constante multiplicativa en ϕ_n) por $(\lambda_n, \phi_n) = (n^2\pi^2, \sin(n\pi x))$, para cada natural $n > 0$. Note que $\phi_1 = \sin(\pi x)$ es siempre positiva en $]0, 1[$. A esta función se le denomina *primera función propia del Laplaciano*, y a $\lambda_1 = \pi^2$ el correspondiente *primer valor propio*.

(b) Muestre que para toda v derivable en $[0, 1]$ y con $v(0) = v(1) = 0$ se tiene

$$\int_0^1 \phi_1' v' \, dx \;=\; \lambda_1 \int_0^1 \phi_1 v \, dx.$$

10. *El problema de Gelfand.* Considere la ecuación no lineal de segundo orden en $[0, 1]$:

$$y'' + \lambda e^y = 0; \quad y(x) > 0 \text{ en } [0, 1]; \quad y(0) = y(1) = 0. \tag{7}$$

Pruebe que *no* existe solución $y_\lambda \in \mathcal{C}^2((0, 1)) \cap \mathcal{C}([0, 1])$ de (7) para $\lambda > \lambda_1$. *Ind.:* Multiplique (7) por $\phi_1 > 0$ dada por el problema anterior, integre por partes y use la desigualdad $e^x \geq x$ para $x > 0$.

3. Soluciones en forma de Series de Potencia

11. Encuentre soluciones l.i. (indicando radios de convergencia) o bien la única solución de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden.

   a) $y'' + x^2 y = 0$.
   b) $y'' - xy = 0$.
   c) $y'' + 2xy' + xy = 0$.
   d) $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$.
   e) $y'' + x^2 y' + x^3 y = 1 + x^3$.
   f) $y'' + xy' - y = 1 + x^2;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.
   g) $2y'' - xy' + 2y = 4 + x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
   h) $y'' - xy' + xy = 2e^x;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1$.
   i) $(100 + x^2)y'' - xy' + y = 1;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

12. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden, usando el método de *Frobenius*. Determine el radio de convergencia en cada caso.

   (a) $-xy'' + 3y' - y = 0$.
   (b) $2xy'' + (1 + x)y' + y = 0$.
   (c) $xy'' + (x - 6)y' - 3y = 0$.

13. La *ecuación de Bessel* de orden p

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0,$$

donde p es un entero no negativo, proviene del método de separación de variables aplicado a la ecuación de ondas $u_{tt} - k^2 \Delta u = 0$ (para pequeñas vibraciones) de una membrana con forma circular.

Encuentre dos soluciones l.i. de la Bessel de orden $\frac{1}{2}$. Discuta radios de convergencia. En particular, una solución es regular en cero, mientras la otra no lo es. La solución singular en cero se denomina *función de Haenkel*.

14. Considere nuevamente la ecuación de Bessel, pero ahora de orden $p = 0$.

(a) Pruebe que la ecuación indicial asociada tiene sólo una raíz. Deduzca que

$$y_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n},$$

es la solución en serie de Frobenius.

(b) Muestre que una segunda solución l.i. con la anterior es

$$y_2 = y_1 \log x + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}(1 + 1/2 + \cdots + 1/n)x^{2n}.$$

15. Resuelva la ecuación de Bessel para cualquier p real tal que $2p$ no sea entero.

16. Resuelva la EDO

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0,$$

estudiando las posibles expansiones en torno a $x = 0$ y $x = 1$. Indique radios de convergencia.

17. La EDO

$$x^2y'' + (3x-1)y' + y = 0,$$

tiene a $x = 0$ como punto singular irregular. Muestre que

$$y = \sum_{n\geq 0} n!x^n,$$

es una solución en serie de Frobenius, pero con radio de convergencia nulo. Discuta la validez de la solución encontrada.

18. La ecuación de *Laguerre*

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0,$$

con n natural, proviene de resolver la ecuación de Schroedinger para el potencial atómico $V(r) = -Ze^2/r$. Estudie soluciones en torno a $x = 0$, en particular de tipo polinomial.