Guía N^{o}2 Ma26a-01 2006-1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

PROF. MANUEL DEL PINO; AUXS.: ANDRÉS CONTRERAS - CLAUDIO MUÑOZ

Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM - U. de Chile

Ecuaciones de Segundo Orden, Primera Parte

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden.

   a) $y'' - y = 0.$
   b) $y'' - 10y' + 25y = 0.$
   c) $y'' + 6y' + 5y = 0; \quad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 3$
   d) $y'' - 8y' + 17y = 0; \quad y(0) = 4, \ \ y'(0) = -1$
   e) $y'' + 16y = 0; \quad y(0) = 2 \ \ y'(0) = -2$
   f) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0.$
   g) $xy'' - (x + 1)y' + y = 0.$
   h) $x^2y'' - 3xy + 5y = 0.$
   i) $y'' + 3y' + 2y = 4x^2.$
   j) $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4\sin x.$
   k) $y'' - 2y' + y = 10e^{-2x}\cos x.$
   l) $y'' + y' = x^2 \sin x.$
   m) $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}.$
   n) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}.$
   ñ) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$, con $x > 0.$

2. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = 4e^{2x} + 2e^x \cos x \ .$$

3. Encuentre la solución del problema de condiciones iniciales

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 50\frac{\ln x}{x^3}, \quad x > 0,$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 5.$$

4. Encuentre la solución general en $\mathbb{R}$ de la ecuación

$$y'' + 2\tanh(x)\, y' + y = 0.$$

Ind. Sea $\mathcal{L}(y) = y' + \tanh(x)\, y$. Calcule $\mathcal{L}(\mathcal{L}(y))$.

¿Puede resolver ahora $y'' - 2\tan(x)\, y' - y = 0$?

5. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

donde p y q son funciones continuas en $\mathbb{R}$ de período 1. Demuestre que si $\phi(t)$ es solución de (1) tal que $\phi(0) = \phi(1)$ y $\phi'(0) = \phi'(1)$ entonces ϕ es también periódica.

6. Suponga que y_1 e y_2 son soluciones l.i. de la ecuación

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

y que a_0, a_1 son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

i) Demuestre que y_1 e y_2 no pueden tener un mismo punto de inflexión, a menos que a_0 y a_1 se anulen simultáneamente en ese punto. *Ind.* En un punto de inflexión la segunda derivada se anula.

ii) Pruebe que si a y b con $a < b$ son dos ceros consecutivos de y_1, entonces existe un punto $c \in]a, b[$ donde y_2 se anula. *Ind.* Considere que el Wronskiano para y_1 e y_2 no cambia de signo. Use el Teorema del Valor Intermedio.

7. (a) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0.$$

(b) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - \frac{4}{x}y + \frac{4}{x^2}y = x^2 + 1, \quad x \in]0, +\infty[.$$

8. (a) Considere el problema no-lineal de condiciones iniciales

$$y'' \; + \; p(x)\, y^3 \; = \; 0 \quad x \in]a, b[\;,$$

$$y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta.$$

donde p es una función continua en $]a, b[$, $x_0 \in]a, b[$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demuestre que este problema posee *a lo más* una solución.

Indicación: Sean y_1, y_2 dos soluciones. Muestre que $h = y_1 - y_2$ satisface una ecuación de la forma $h'' + q(t)h = 0$ con $q(t)$ continua.

(b) Considere la ecuación diferencial

$$y'' \; + \; p(x)\, y' + q(x)y = 0 \; = \; 0 \quad x \in]a, b[\;,$$

con p, q continuas en $]a, b[$. Suponga que y_1 e y_2 son dos soluciones no-nulas de esta ecuación tales que para cierto $x_0 \in]a, b[$ se tiene $y_1(x_0) = 0 = y_2(x_0)$. Muestre que existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $y_1(x) = Ay_2(x)$ para todo $x \in]a, b[$.

9. Considere la siguiente ecuación:

$$y'' + (1 + \gamma \sin(\varepsilon x)) \sin y = 0. \tag{2}$$

Muestre que si y es solución de (2) con $y(\frac{T_n}{\varepsilon}) = k\pi$, con $T_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ y para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$y(\frac{T_n}{\varepsilon} + s) = 2k\pi - y(\frac{T_n}{\varepsilon} - s), \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

10. *Dosis de glucosa.* La desviación $g(t)$ de la concentración de glucosa desde su nivel base N_b en un cuerpo humano puede modelarse por la EDO

$$g'' + 2\alpha g' + w_0^2 g = 0$$

donde $\alpha > 0$, $w_0 > 0$ y $g(0) = 0$, $g'(0) = \beta$ donde β es la tasa inicial (desconocida) de variación de glucosa.

i) Determine $g(t)$ en términos de α, β y $w = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2}$ (considere el caso $w_0 > \alpha$).

ii) Suponga que un paciente llega a un hospital con nivel base de glucosa igual a $0,7[mg/cm^3]$ y entonces se le suministra una fuerte dosis de glucosa. Al cabo de 1 hora, 2 horas y 3 horas se miden niveles de 1; $0,55$ y $0,75[mg/cm^3]$ respectivamente.
Verifique que si $\gamma = \sin w$, entonces necesariamente $\gamma = \frac{1}{2}$.

iii) Bajo las condiciones de (ii), pruebe que para ese paciente se tiene $w = 5\pi/6$, $\alpha = \frac{1}{2}\ln 12$ y $\beta = \pi\sqrt{3}$

iv) Se sabe que los pacientes *no diabéticos* tienen valores de w_0(que corresponde a la frecuencia de oscilaciones no amortiguadas) de período máximo $4[hrs]$, mientras que los diversos grados de diabetes se atribuyen a pacientes con períodos mayores a $4[hrs]$.
Con la información anterior clasifique al paciente de (ii).