Pauta Pregunta 3, Control 1 - MA2601 - EDO
Escuela de Ingeniería y Ciencias, Universidad de Chile

02 de Abril 2009

Profesor Cátedra: Michal Kowalczyk - Profesor Auxiliar: Darío Valdebenito
Ayudantes: Nicolás Hernandez - Claudia Hidalgo - Matías Godoy

Pregunta 3. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $y'' = y'e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

b) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$
Indicación: use el cambio de variables $u = y^3$

c) $xy' = 2x^2y + y\log y$
Indicación: Verifique que el cambio de variables $z(x) = \log y(x)$ reduce este problema a una ecuación lineal. Luego resuelva la ecuación.

Soluciones.

a) $y'' = y'e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

Notar que: $y'' = y'e^y = \dfrac{d}{dx}(e^{y(x)})$ Luego:

$$\frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(e^y) \Rightarrow \int_0^x \frac{d}{ds}(y') = \int_0^x \frac{d}{ds}e^y$$

$$y'(x) - y'(0) = e^{y(x)} - e^{y(0)} \Rightarrow y'(x) - 2 = e^{y(x)} - 1$$

$$y' = e^y + 1$$

$$\int_0^{y(x)} \frac{ds}{e^s + 1} = \int_0^x 1ds = x$$

Notando que $\displaystyle\int \frac{ds}{e^s+1} = s - \ln(e^s + 1)$ (Basta tomar $u = e^s + 1$ y luego hacer fracciones parciales) se tiene:

$$y(x) - \ln(e^{y(x)} + 1) + \ln(2) = x \Leftrightarrow \ln e^{y(x)} - \ln(e^{y(x)} + 1) + \ln(2) = x$$

$$\ln\frac{2e^{y(x)}}{e^{y(x)} + 1} = x \Leftrightarrow \frac{2e^{y(x)}}{e^{y(x)} + 1} = e^x$$

En definitiva:

$$y(x) = x - \ln(2 - e^x)$$

Observación: También es posible realizar el cambio de variable: $u(y) = y'$

b) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$

Realicemos el cambio de variable sugerido, sea: $u = y^3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 3y'y^2$

Notemos que: $xy^2y' + y^3 = x\cos x \Rightarrow 3y^2y' = 3\cos x - \dfrac{3y^3}{x} = 3\cos x - \dfrac{3u}{x} = \dfrac{du}{dx}$

Por lo tanto la ecuación pasa a ser:

$$u' + \frac{3}{x}u = 3\cos x$$

Usemos factor integrante: x^3

$$x^3 \cdot u' + 3x^2 \cdot u = 3x^3\cos x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(x^3u) = 3x^3\cos x$$

$$x^3u(x) = 3\int x^3\cos x dx + C \Rightarrow u(x) = x^{-3}\cdot 3\int x^3\cos x dx + Cx^{-3}$$

Sea $I(x) = \displaystyle\int x^3\cos x dx = x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6\cos x - 6x\sin x$ (Integración por partes)

$$u(x) = y^3 = x^{-3}\cdot(3I(x)+C) \Rightarrow y(x) = x^{-1}\cdot(3I(x)+C)^{1/3}$$

c) $xy' = 2x^2y + y\log y$

Realicemos el cambio de variable sugerido, sea: $z(x) = \log y(x) \ \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\log y(x) = \dfrac{y'}{y}$

Entonces se tiene:

$$xy' = 2x^2y + y\log y \Leftrightarrow x\frac{y'}{y} = 2x^2 + \log y \Leftrightarrow xz' = 2x^2 + z$$

$$xz' - z = 2x^2$$

Que es una ecuación lineal. Introduciendo el factor integrante $e^{-\int\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x}$ se tiene:

$$z' - \frac{1}{x}z = 2x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\frac{z}{x}) = 2$$

$$\frac{z}{x} = 2x + C \Rightarrow z = 2x^2 + Cx \Rightarrow y = e^z = e^{2x^2+Cx}$$

Es decir:

$$y(x) = e^{2x^2}\cdot e^{Cx}$$