Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Clase Auxiliar 28 de Abril

MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesor: Felipe Álvarez

Auxiliares: Roberto Castillo, Benjamín Palacios

P1.-

Utilizar el teorema de existencia y unicidad para probar que $y = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x)$ es la solución general de la ecuación $y'' + y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Indicación: Si $u(x)$ es una solución cualquiera en $(-\infty, \infty)$, mostrar que pueden escogerse C_1 y C_2 tales que $y(0) = u(0)$, $y'(0) = u'(0)$.

Solución:

Sea $u(x)$ solución de $y'' + y = 0$ en $(-\infty, \infty)$ tal que $u(0) = a$, $u'(0) = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Considerando $y(0) = C_1 \operatorname{sen}(0) + C_2 cos(0) = C_2$, $y'(0) = C_1 \cos(0) - C_2 \operatorname{sen}(0) = C_1$. Tomando $C_2 = a$, $C_1 = b$ se tiene que $y(0) = u(0) = a$, $y'(0) = u'(0) = b$.

Sea $v(x) = y(x) - u(x) = b \operatorname{sen}(x) + a \cos(x) - u(x)$, se tiene que $v'' + v = -b \operatorname{sen}(x) - a \cos(x) - u''(x) + b \operatorname{sen}(x) + a \cos(x) - u(x) = -(u'' + u) = 0$.

Y como $v(0) = y(0) - u(0) = 0$, $v'(0) = y'(0) - u'(0) = 0$, por la unicidad de la solución para el problema $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, se tiene que v es la función nula. Por lo tanto

$$u(x) = b \operatorname{sen}(x) + a \cos(x)$$

P2.-

Definición: Dada una función $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivable en su dominio. Se dice que x_0 es un cero simple de u si $u(x_0) = 0 \wedge u'(x_0) \neq 0$.

Probar que toda solución no trivial $u(x)$ (es decir, la solución no es la función nula) de la ecuación $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, con a_2, a_1, a_0 funciones continuas, tiene sólo ceros simples.

Solución:

Por el teorema de existencia y unicidad, el problema

$$(P) \begin{cases} a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tiene solución única que depende del x_0 que se escoja como punto de valor inicial y α. Luego al mover x_0, se puede obtener cualquier solución de la ecuación que tenga algún cero. Se verá que x_0

es simple, es decir, que necesariamente $\alpha \neq 0$.
Sea $u(x)$ solución no trivial tal que $u(x_0) = 0$ y $u'(x_0) = \alpha$. Si $\alpha = 0$, por existencia y unicidad $u(x) \equiv 0$ ya que la función nula satisface el problema de condiciones iniciales. Lo que es una contradicción (pues se exige que u(x) sea una solución no trivial).

P3.-
Probar que soluciones distintas de la EDO lineal de segundo orden $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = ln(x)$, con a_1, a_0 funciones continuas, no tienen ningún punto de tangencia mutua.

Solución:
Sean $u(x)$, $v(x)$ soluciones distintas de la EDO y supongamos que tienen un punto de tangencia mutuo, es decir que

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } \begin{cases} u(x_0) = v(x_0) \\ u'(x_0) = v'(x_0) \end{cases}$$

Definamos $h(x) := u(x) - v(x)$, $h(x)$ satisface el problema de Cauchy:

$$(P) \begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0 = 0 \end{cases}$$

En efecto: $h'' + a_1(x)h' + a_0(x)h = u'' - v'' + a_1(x)u' - a_1(x)v' + a_0(x)u - a_0(x)v = u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u - (v'' + a_1(x)v' + a_0(x)v) = ln(x) - ln(x) = 0$
Además:

$$\begin{aligned} h(x_0) = & \quad u(x_0) - v(x_0) & = 0 \\ h'(x_0) = & \quad u'(x_0) - v'(x_0) & = 0 \end{aligned}$$

Luego, por el teorema de existencia y unicidad (particularmente la unicidad) aplicado a (P), se tiene que $h \equiv 0$, luego se tiene que u = v, lo que es una contradicción (pues las supusimos soluciones distintas).

P4.-
Sea $a > 0$, $f \in C^1(-a, a)$ una función impar con $f'(0) = 0$

(i) Demuestre que $W(f(x), |f(x)|) \equiv 0 \ \forall x \in (-a, a)$.

(ii) Demuestre que $f(x)$ y $|f(x)|$ son linealmente independientes en $(-a, a)$ a menos que $f(x)$ sea idénticamente nula.

(iii) Lo anterior le parece una contradicción? Comente.

Solución:

(i) Se tiene que si $f(x) \geq 0$, $|f(x)| = f(x)$ y si $f(x) < 0$, $|f(x)| = -f(x) = f(-x)$ (pues f es impar). Con esto se tiene que si $f(x) \geq 0$:

$$W(f,|f|)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f(x) \\ f'(x) & f'(x) \end{vmatrix} = 0$$

y si $f(x) < 0$:

$$\begin{aligned} W(f,|f|)(x) &= \begin{vmatrix} f(x) & f(-x) \\ f'(x) & -f'(x) \end{vmatrix} \\ \% &= -f(x)f'(x) - f(-x)f'(x) \\ \% &= f(-x)f'(x) - f(-x)f'(x) \\ \% &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

lo que prueba que $W(f,|f|)(x) = 0 \ \forall x \in (-a,a)$

(ii) Sea f una función no idénticamente nula y sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $af(x) + b|f(x)| = 0 \ \forall x \in (-a,a)$. Se tiene que:
Si $f(x) \geq 0$, $(a+b)f(x) = 0$.
Si $f(x) < 0$, $(a-b)f(x) = 0$.
Como f no es idénticamente nula, existe x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$ ($x_0 \in (-a,a)$), sin pérdida de generalidad supóngase que $f(x_0) > 0$, luego $f(-x_0) = -f(x_0) < 0$, de lo cual se obtiene que $(a+b=0) \wedge (a-b=0)$, lo que implica que $a = b = 0$.

(iii) Lo anterior no representa una contradicción con los resultados vistos pues se sabe que el hecho de que el Wronskiano sea igual a cero no implica la dependencia lineal, esto es sólo cierto si las funciones son soluciones de una misma ecuación diferencial.

Problemas Propuestos

P5.-

(i) Probar la regla de Leibnitz

$$D^n[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^{n-k}[f(x)])(D^k[g(x)])$$

(ii) Demostrar que $(x^m D^m)[x^k] = \frac{k!}{(k-m)!} x^k$ con $k \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

(iii) Un operador lineal L se dice *equidimensional* o *de Euler* si se puede escribir de la forma:

$$L = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k D^k$$

con $a_0, .., a_n$ constantes.

1. Calcular Lx^k, $k \in \mathbb{R}$, con L operador equidimensional.
2. Probar que $(x^m D^m)(x^n D^n) = (x^n D^n)(x^m D^m)$ $\forall m, n \in \mathbb{N}$ y deducir que el producto de operadores equidimensionales es conmutativo.

P6.-

La ecuación diferencial

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0,$$

donde a, b y c son constantes reales, es llamada ecuación de Euler. Tiene al menos una solución del tipo $y(x) = x^\lambda$.

(i) Deduzca que λ debe de satisfacer la ecuación

$$a\lambda(\lambda - 1) + b\lambda + c \ = \ 0 \tag{2}$$

Sean λ_1 y λ_2 las raíces de (1). En cada uno de los casos siguientes encuentre una base del espacio solución demostrando expícitamente la independencia lineal.

(ii) λ_1 y λ_2 son reales y distintas.

(iii) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \bar{\lambda_1}$, con $\beta \neq 0$.

(iv) $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a-b}{2a}$.

P7.-

Consideremos un resorte elástico que cuelga de un extremo fijo y cuyo otro extremo es libre de oscilar en la dirección vertical. La ecuación que modela el movimiento de una masa m sujeta al extremo libre del resorte está dada por

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = h(t),$$

donde $y(t)$ es la posición de la masa en el instante t con respecto a la posición de equilibrio, $k > 0$ es la constante del resorte y $h(t)$ es una fuerza externa arbitraria. En lo que sigue, supondremos que inicialmente el sistema masa-resorte estaba en equilibrio de modo tal que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

(i) Pruebe que $y(t)$ admite la siguiente expresión integral

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}} \int_0^t \operatorname{sen}(\omega(t - \xi))h(\xi)d\xi,$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia natural del sistema masa-resorte.

(ii) Encuentre la solución explícita cuando

(a) $h(t) = h_0$ (constante).

(b) $h(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t)$. Recuerde que $\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$.

(iii) Ahora queremos determinar la respuesta del sistema cuando la masa es "golpeada" sorpresivamente en un instante $t = a > 0$ luego de haber permanecido en reposo. Esta situación puede modelarse considerando una fuerza externa de la forma

$$h(t) \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq a \\ \frac{1}{\sigma} & a < t < a+\sigma \\ 0 & a+\sigma \leq t \end{cases}$$

donde $\sigma > 0$ es "pequeño". Físicamnete, $h(t)$ representa una fuerza de magnitud $1/\sigma$ que actúa sobre el sistema durante un tiempo σ a partir del instante $t = a$. Determine la solución en este caso.