

MA2601 – Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Pauta Pregunta 2 Trabajo Dirigido

1 de Abril, 2009

Profesor: Felipe Álvarez

Auxiliares: Roberto Castillo, Benjamín Palacios

Pregunta 2.

- (a) Resolviendo la EDO por separación de variables se puede obtener la solución $y_1(x) = \sin(x + \pi/2)$. El hecho de que haya dos soluciones no viola el teorema de existencia y unicidad porque la función que define la ecuación diferencial no satisface las hipótesis necesarias para el teorema de existencia y unicidad, por lo que el teorema no aplica en esta circunstancia y vemos que es posible que hayan dos soluciones. Observemos que

$$|\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-z^2}| = \frac{|y-z||y+z|}{\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2}}$$

con esto se ve claramente que la función no es Lipschitz a nivel global. En cuanto a la posibilidad de que sea Lipschitz a nivel local, notamos que en un intervalo siempre podemos acotar $|y+z|$ por el doble del supremo de los elementos del intervalo. Sin embargo, dentro de ese intervalo se puede lograr que $1-y^2$ y $1-z^2$ sean arbitrariamente pequeños, de modo que no se puede acotar el denominador por una constante y la función no es Lipschitz a nivel local. Como la función no satisface las hipótesis del teorema, el teorema no aplica a este caso y por lo tanto, el hecho de que existan a lo menos dos soluciones distintas no es un problema.

- (b) (i) Considerando como cierta la igualdad. Se observa que el cambio de variable propuesto hace que $u' = \frac{F'(y)y'G(y)+G'(y)y'F(y)}{[G(y)]^2}$ (por la regla del producto para derivación. De modo que considerando la igualdad dada $u' = C_0 \frac{y'}{G(y)}$. Se observa que al dividir por $G(y)$ la ecuación original queda:

$$\frac{y'}{G(y)} = P(x) \frac{F(y)}{G(y)} + Q(x)$$

realizando el cambio de variables adecuado se reduce a:

$$\frac{1}{C_0} u' = P(x)u + Q(x)$$

que es una ecuación lineal de primer orden en u . (Win!)

- (ii) Ahora se aplica el método para reducir a una EDO lineal a una ecuación concreta. Se tiene que $Q(x) \equiv 1$, $P(x) = \frac{1}{x}$, que son funciones continuas. $F(y) = \tan(y)$, $G(y) = \sec(y)$ que son funciones derivables y G no es idénticamente nula. Finalmente se calcula

$$H(y) = \frac{\tan'(y)\sec(y) - \sec'(y)\tan(y)}{[\sec(y)]^2}$$

recordando que $\tan'(y) = [\sec(y)]^2$, que $\sec'(y) = \sec(y)\tan(y)$ y que $[\sec(y)]^2 = [\tan(y)]^2 + 1$, se obtiene que

$$H(y) = \frac{[\sec(y)]^3 - \sec(y)[\tan(y)]^2}{\sec(y)} = [\sec(y)^2] - [\tan(y)]^2 \equiv 1$$

haciendo el cambio de variables ya conocido, la ecuación que se debe de resolver es

$$u' - u = \frac{1}{x}$$

se aplica el factor integrante correspondiente que es e^{-x} y se obtiene que

$$u = e^x \int \frac{e^{-x}}{x} dx + C$$

volvemos a la variable original y se tiene

$$\frac{\tan(y)}{\sec(y)} = \sin(y) = e^x \int \frac{e^{-x}}{x} dx + C$$

luego

$$y = \arcsin\left(e^x \int \frac{e^{-x}}{x} dx + C\right).$$

Nota: La integral indefinida ahí expuesta se ha dejado expresada porque no existe expresión analítica para ella.