Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Trabajo Dirigido para Control 1

MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesor: Felipe Álvarez
Profesores Auxiliares: Roberto Castillo, Benjamín Palacios
Martes 31 de Marzo de 2009

P1.- [P8 guía de ejercicios para semana 3]
Una estrella esferoidal de radio $a > 0$ está compuesta por un fluido compresible cuya presión $p(r)$ y densidad $\rho(r)$ son funciones radiales $(0 \leq r \leq a)$ tales que $p = k\rho^2$ con k constante positiva. Si $g(r)$ es la gravedad a una distancia r del centro de la esfera, entonces un balance de momentos y la ley de gravitación nos dan las relaciones:

$$p' = -g(r)\rho(r), \qquad r^2 g(r) = 4\pi G \int_0^r s^2 \rho(s) ds$$

donde G es la constante de gravitación universal y las derivadas están tomadas con respecto a r.

(1) Deducir que ρ satisface la ecuación diferencial

$$r\rho'' + 2\rho' + \alpha^2 r\rho = 0, \quad \alpha^2 = \frac{2\pi G}{k}$$

(2) Determine $\rho(r)$ en términos de $\rho(0)$, la densidad del núcleo estelar.
Hint: Resuelva para $(r\rho)''$. Note que $\rho(r)$ debe ser positiva y finita si $r \to 0$.

(3) Explique por qué este modelo predice estrellas de máximo tamaño $a = \frac{\pi}{\alpha}$.

P2.- [P2 control 1 2004 - Prof. Felipe Álvarez]

(a) Encuentre una solución $y_1(x)$ no constante en el intervalo $[0, \pi]$ del problema con condición inicial $y' + \sqrt{1 - y^2} = 0, \quad y(0) = 1$. Verifique que $y_2(x) \equiv 1$ también es una solución del problema Contradice este hecho el teorema de existencia y unicidad? Explique.

(b) Considere la ecuación diferencial

$$y' = P(x)F(y) + Q(x)G(y)$$

donde P y Q son funciones continuas, F y G son derivables y G no es idénticamente nula.

(i) Muestre que si

$$\frac{F'(y)G(y) - G'(y)F(y)}{G(y)} = C_0$$

donde C_0 es una constante, entonces la sustitución $u = F(y)/G(y)$ permite reducir la ecuación diferencial a una EDO lineal de primer orden en u.

(ii) Resuelva la ecuación $y' = \tan(y) + \frac{1}{x}\sec(y)$ aplicando el método de la parte (i).
Indicación: comience por verificar que se satisface la condición sealada con $C_0 = 1$.

P3.-

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

(i) $\frac{dy}{dx} - 5y = \frac{5}{2}xy^3$

(ii) $y' + \cot(t)y + \frac{1}{\operatorname{sen}(t)}y^2 = 0, \quad y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$