Pauta P3

Para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua, considere la ecuación

(2) $y''+y=f(t)$

(a)(2pt) Encuentre la solución general de la ecuación (2) cuando $f(t)=sent$

<u>Solución:</u> Debemos encontrar la solución homogénea y particular de (2).

Solución Homogénea: y_h

$y_h''+y_h=0$

Polinomio característico: $\lambda^2+\lambda=0\Rightarrow\lambda=\pm i$

Por lo tanto $y_h=c_1\cos t+c_2 sent$ (0.8 pts)

Solución Particular: y_p

1ª Forma: Coeficientes Indeterminados

Por el método de coeficientes indeterminados una solución tentativa sería

$y_p=A\cos t+Bsent$

Sin embargo la solución y_p tiene multiplicidad algebraica 1 para la ecuación (2), por lo que la solución particular correcta sería $y_p=At\cos t+Btsent$. (0.3 pts)

Luego:

$y_p'=A\cos t-Atsent+Bsent+Bt\cos t$

$y_p''=-2Asent-At\cos t+2B\cos t-Btsent$

Llevando lo anterior a (2) se tiene:

$$-2Asent-At\cos t+2B\cos t-Btsent+A\cos t-Atsent+Bsent+Bt\cos t=sent$$

$$\Rightarrow B=0,\ A=-\frac{1}{2}$$

Por lo tanto $y_p=-\frac{1}{2}t\cos t$. (0.6 pts)

Finalmente $y=y_h+y_p=c_1\cos t+c_2 sent-\frac{1}{2}t\cos t$ (0.3 pts)

2ª Forma: Variación de Parámetros

$$y = u_1(t)y_1 + u_2(t)y_2$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow y_1, y_2 \ l.i$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & sen(t) \\ sen(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = -sen^2(t)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos(t) & 0 \\ -sen(t) & sen(t) \end{vmatrix} = \cos(t)sen(t)$$

$$u_1 = \int_0^t -sen^2(t)dt = -\int_0^t \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \left[-\frac{t}{2} + \frac{sen(2t)}{4}\right]_0^t = -\frac{t}{2} + \frac{sen(2t)}{4}$$

(0.3 pts)

$$u_2 = \int_0^t \cos(t)sen(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^t sen(2t)dt = \left[\frac{-\cos(2t)}{4}\right]_0^t = \frac{1}{4} - \frac{\cos(2t)}{4}$$

Por lo tanto, por reducciones e identidades trigonométricas se concluye:

$$y_p = \left(-\frac{t}{2} + \frac{sen(2t)}{4}\right)\cos(t) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(2t)}{4}\right)sen(t) = -\frac{t}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}sen(t)$$ (0.6 pts)

Finalmente

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1\cos(t) + c_2 sen(t) - \frac{t}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}sen(t)$$

$$= c_1\cos(t) + \tilde{c}_2 sen(t) - \frac{t}{2}\cos(t)$$ (0.3 pts)

(b)(2pt) Utilizando la formula de variación de parámetros, pruebe que la solución de (2) con $y(0) = y_0$**,** $y'(0) = v_0$ **está dada por:**

$$y(t) = \int_0^t sen(t-s) f(s)ds + y_0\cos t + v_0 sent.$$

__**Solución:**__ Según el método de variación de parámetros suponemos que la solución particular corresponde a $y_p = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$, donde:

$y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) = sent$ conjunto fundamental de (2).

$$u_1'(t) = \frac{W_1}{W} \quad , \quad u_2'(t) = \frac{W_2}{W}$$

A su vez:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos t & sent \\ -sent & \cos t \end{vmatrix}=\cos^2 t+sen^2 t=1$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(t) & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & sent \\ f(t) & \cos t \end{vmatrix}=-sen(t)\,f(t)$$

$$W_2=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -sent & f(t) \end{vmatrix}=\cos(t)\,f(t)$$

$$u_1'(t)=\int_0^t \frac{W_1}{W}ds=\int_0^t -sen(s)\,f(s)ds$$

$$u_2'(t)=\int_0^t \frac{W_2}{W}dt=\int_0^t \cos(s)\,f(s)ds$$

(0.5 pts)

Por lo tanto:

$$y_p=\cos t\int_0^t -sen(s)\,f(s)ds+sent\int_0^t \cos(s)\,f(s)ds$$

$$=\int_0^t \left(-\cos(t)sen(s)+sen(t)\cos(s)\right)\,f(s)ds$$

$$=\int_0^t sen(t-s)\,f(s)ds$$

En consecuencia la solución general de (2) corresponde a:

$$y=y_h+y_p=c_1\cos t+c_2 sent+\int_0^t sen(t-s)\,f(s)ds \qquad \text{(1.0 pts)}$$

Imponemos la condiciones iniciales de (2):

$$y(0)=y_0 \Rightarrow c_1=y_0$$

$$y'=-c_1\,sent+c_2\cos t+0=-y_0 sent+c_2\cos t$$

$$y'(0)=v_0 \Rightarrow c_2=v_0$$

Finalmente

$$y(t)=\int_0^t sen(t-s)\,f(s)ds+y_0\cos t+v_0 sent. \text{ (0.5 pts)}$$

(c) (2pt) Demuestre que si existe $M>0$ tal que $|f(t)|\le M$ para todo t, entonces si y es cualquier solución de (2) se tiene que $\left|\dfrac{y(t)}{\sqrt{1+t^2}}\right|$ es acotada en $\mathbb{R}$.

<u>**Solución:**</u> Sea $y(t)$ sol. de (2) por lo que se tiene que:

$$y(t)=\int_0^t sen(t-s)\,f(s)ds + y_0\cos t + v_0 sent.$$

Suponemos que la solución tiene condiciones iniciales dadas por $y(0)=y_0$, $y'(0)=v_0$.
Acotando lo anterior se concluye que:

$$|y(t)|=\left|\int_0^t sen(t-s)\,f(s)ds + y_0\cos t + v_0 sent\right|$$

$$\le\left|\int_0^t sen(t-s)\,f(s)ds\right| + |y_0\cos t| + |v_0 sent|$$

$$\le\int_0^t |sen(t-s)\,f(s)|ds + |y_0| + |v_0|$$

$$\le\int_0^t |sen(t-s)|\,|f(s)|\,ds + |y_0| + |v_0|$$

$$\le\int_0^t M\,ds + |y_0| + |v_0|$$

$$= tM + |y_0| + |v_0| \qquad \textbf{(*)}$$

Hasta aquí (1.0 pts)

De aquí en adelante encontrar una cota en $\mathbb{R}$ para $\left|\dfrac{y(t)}{\sqrt{1+t^2}}\right|$ puede seguir muchos caminos:

1ª Forma

Continuando con (*) se tiene:

$|y(t)|\le k(1+t)$ con $k=\max\{M, |y_0|+|v_0|\}$

$= k\sqrt{(1+t)^2}$

Notar que $(t-1)^2\ge 0 \Rightarrow 1+t^2\ge 2t \Rightarrow (t+1)^2\le 2(1+t^2)$, por lo tanto:

$$|y(t)|\le k\sqrt{2(1+t^2)} \Rightarrow \frac{|y(t)|}{\sqrt{1+t^2}}\le k\sqrt{2} \text{ (1.0 pts)}$$

Nota: Pueden existir otros caminos para obtener una cota en $\mathbb{R}$, por lo que para efectos de evaluación se considera (1.0 pts) por acotar en función de t, y (1.0 pts) por encontrar una cota en $\mathbb{R}$.

Dudas o Reclamos
Alejandro Quezada
alquezad@ing.uchile.cl