

Auxiliar n° 12: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesor: Axel Osses A.

Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez, Luis Sánchez

24 de junio, 2009

Pregunta 1

Considere el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + f(x) \end{cases} \quad (1)$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Se define $F(s) = 2 \int_0^s f(\tau) d\tau$.

1. Demuestre que para toda solución $(x(t), y(t))$ de (1), existe $C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = C + F(x(t)) \quad \forall t > 0 \quad (2)$$

En lo que sigue, supondremos que $f(0) = 0$ y que $\exists \rho > 0$ tal que:

$$|F(s)| \leq \frac{1}{2}s^2 \quad \forall s \in [-\rho, \rho] \quad (3)$$

2. Verifique que $(0, 0)$ es punto crítico y concluya respecto de su estabilidad. Para esto último, considere ε tal que $0 < \sqrt{\varepsilon} < \rho$, $(x(t), y(t))$ solución de (1) tal que $x(0)^2 + y(0)^2 < \frac{\varepsilon}{4}$ y siga los siguientes pasos:

(a) Demuestre que la constante C en (2) satisface que: $C < \frac{3\varepsilon}{8}$.

(b) Demuestre que $x(t)^2 + y(t)^2 < \varepsilon, \forall t > 0$. Proceda por contradicción.

3. Pruebe que ninguna solución $(x(t), y(t))$ de (1) (excepto $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$) satisface que $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Notar que, en particular, esto dice que $(0, 0)$ no es asintóticamente estable. *Hint: primero demuestre que necesariamente se tiene en (2) que $C = 0$, y llegue a una contradicción utilizando (3).*

4. Considere la ecuación de segundo orden:

$$\ddot{x} + x - x^n = 0$$

con $n > 1$. Muestre que no existen soluciones $x(t)$ no nulas que tiendan a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.

5. ¿Qué se podría decir de la función $V(x, y) = x^2 + y^2 - F(x)$?

Pregunta 2

Considere un péndulo invertido (varilla rígida de largo $L > 0$) donde compiten en la dinámica del desplazamiento angular θ , por un lado, la fuerza de restitución de un resorte de rigidez $k > 0$, y por otro, su peso mg . Un modelo propuesto es:

$$m\ddot{\theta} = -kL\theta + mg(\theta - \theta^3)$$

1. Escriba la EDO como un sistema de ecuaciones de primer orden.
2. En lo que sigue, supondremos $\alpha = \frac{kL}{mg} < 1$. Demuestre que el sistema tiene tres puntos críticos: $(0, 0)$, $(\sqrt{1 - \alpha}, 0)$, $(-\sqrt{1 - \alpha}, 0)$.
3. Verifique que los puntos críticos son aislados y clasifíquelos según tipo y estabilidad. Si son espirales o centros, indique la dirección de giro. Si son nodos o puntos silla, indique las direcciones propias. Elabore un diagrama de fases.