Auxiliar n° 10: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesor: Axel Osses A.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez, Luis Sánchez

10 de junio, 2009

Pregunta 1

Sean $\overrightarrow{x_1}(t), \overrightarrow{x_2}(t)$ dos soluciones de un sistema de $n \times n$ de la forma:

$$\overrightarrow{x}' = A(t)\,\overrightarrow{x}$$

donde los coeficientes de la matriz $A(t)$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$. Demuestre que si los vectores $\overrightarrow{x_1}(0), \overrightarrow{x_2}(0)$ son paralelos, entonces los vectores $\overrightarrow{x_1}(t), \overrightarrow{x_2}(t)$ también lo son, $\forall t$.

Pregunta 2

Considere una matriz A de tamaño $n \times n$.

1. Sea $\overrightarrow{v}$ un vector propio de A asociado al valor propio λ. Verifique que $\overrightarrow{x}(t) = e^{\lambda t}\overrightarrow{v}$ es solución del sistema lineal $\overrightarrow{x}' = A(t)\,\overrightarrow{x}$.

2. Deduzca que si $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ son n vectores propios linealmente independientes de A, asociados a valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos), entonces la solución general del sistema $\overrightarrow{x}' = A(t)\,\overrightarrow{x}$ es de la forma:
$$\overrightarrow{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{v_1} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}\overrightarrow{v_n}$$
donde $C, \ldots, C_n$ son constantes.

3. Resuelva, ocupando lo anterior, el siguiente sistema:
$$\begin{aligned} \overrightarrow{x_1}' &= 2\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{x_2}' &= \overrightarrow{x_1} + 2\overrightarrow{x_2} \end{aligned}$$

4. Calcule e^{tA}, con A la matriz de la parte anterior y relacione los resultados.

5. Resuelva ahora el siguiente problema no homogéneo de valor inicial:

$$\begin{cases} \overrightarrow{x}'(t) & = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{x}(0) & = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Pregunta 3

Calcular e^{tA} para la siguiente matriz A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pregunta 4

Considere un sistema de segundo orden para $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$ de la forma:

$$\overrightarrow{x}'' = A\overrightarrow{x}$$

donde la matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tiene valores propios $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$, con respectivos vectores propios asociados:

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Encuentre una expresión para la solución general del sistema, considerando soluciones de la forma $e^{\mu t}\overrightarrow{u}$.

2. Convierta el sistema en un sistema de primer orden.

3. Propuesto: resuelva el sistema de primer orden y compare las soluciones obtenidas con las de la primera parte.