Auxiliar n^o2: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesor: Axel Osses A.

Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez, Luis Sánchez

25 de marzo, 2009

Pregunta 1

Dos sustancias A y B serán transformadas en un sólo compuesto C . Se cumple que *el aumento en la cantidad "y" del compuesto C es proporcional al producto de las cantidades de sustancia A y B no transformadas aún*. Suponga que para formar una unidad de compuesto C se necesita de una unidad de A y una unidad de B . Suponga que en $t = 0$ hay a unidades de A , b unidades de B y ninguna de C .

1. Escriba una ley de transformación (EDO de primer orden para y) justificando cada uno de sus términos.
2. Resuelva la ecuación diferencial con las condiciones iniciales dadas.
3. Suponga que $k > 0$. Investigue el comportamiento de y cuando $t \rightarrow +\infty$.

Pregunta 2

Responda a los siguientes planteamientos:

1. Sea I un intervalo y suponga que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que si $f(x) > 0$ entonces $f'(x) < 0$. Pruebe que si $f(x_0) \leq 0$ para algún $x_0 \in I$ entonces $f(x) \leq 0$ para todo $x \in I$ tal que $x > x_0$.
2. Suponga que $y : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable que satisface la ecuación diferencial $y'(x) = y(x)^2 - x$ y que $y(x_0)^2 < x_0$ para algún x_0 . Pruebe que $y(x)^2 < x$ para todo $x \geq x_0$. Le será útil adaptar el resultado del punto anterior.
3. Para $i = 1, 2$, sea $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ una solución de $y' = F_i(x, y)$ con $F_i : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Suponga que para cada $x \in I$ se tiene

$$(z_1 - z_2)(F_1(x, z_1) - F_2(x, z_2)) > 0 \text{ si } z_1 \neq z_2$$

Pruebe que si $y_1(0) < y_2(0)$ entonces $y_1(x) < y_2(x)$ para todo $x \in I$ con $x \geq 0$. Deduzca que la solución de

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

debe tener una asíntota vertical en algún $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ (le será útil saber que $y = \tan(x)$ satisface $y' = 1 + y^2$).

Pregunta 3 (Control 1, Primavera 2006)

Se propone un modelo para la aparición de inconformistas en una sociedad. La sociedad tiene una población de $y(t)$ individuos en un tiempo $t \geq 0$. Se supone que si dos inconformistas tienen hijos, éstos también lo serán. Además, una proporción fija $r \in (0, 1)$ de los hijos del resto de la población también se volverán inconformistas. Las tasas de natalidad y mortalidad son $n > 0$ y $m > 0$, respectivamente. Sea $z(t)$ la población de inconformistas. Entonces:

$$\begin{cases} y' = (n - m)y \\ z' = (n - m)z + nr(y - z) \end{cases}$$

1. Explique qué representa la variable $p = z/y$. Encuentre una EDO de primer orden para p .
2. Si $y_0 > z_0 > 0$, $p_0 = z_0/y_0$ son las condiciones iniciales, encuentre $y(t)$, $p(t)$ y a partir de esto encuentre $z(t)$.
3. Grafique la evolución de $p(t)$ en el tiempo. ¿Qué predice el modelo cuando $t \rightarrow +\infty$?
4. Muestre que la mitad de la población que no era inconformista se vuelve inconformista en un tiempo $t = \frac{\ln(2)}{nr}$.