



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Apunte de curso

AXEL OSSES

Centro de Modelamiento Matemático
Departamento de Ingeniería Matemática
axosses@dim.uchile.cl

JUAN PEYPOUQUET

Departamento de Ingeniería Matemática
jpeypou@dim.uchile.cl

con la colaboración de FELIPE ALVAREZ

Departamento de Ingeniería Matemática
falvarez@dim.uchile.cl

Se concede permiso para imprimir o almacenar una única copia de este documento. Salvo por las excepciones más abajo señaladas, este permiso no autoriza fotocopiar o reproducir copias para otro uso que no sea el personal, o distribuir o dar acceso a copias electrónicas de este documento sin permiso previo por escrito del Director del Departamento de Ingeniería Matemática (DIM) de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas (FCFM) de la Universidad de Chile.

Las excepciones al permiso por escrito del párrafo anterior son: (1) Las copias electrónicas disponibles bajo el dominio uchile.cl, (2) Las copias distribuidas por el cuerpo docente de la FCFM en el ejercicio de las funciones que le son propias.

Cualquier reproducción parcial de este documento debe hacer referencia a su fuente de origen.

Este documento fue financiado a través de los recursos asignados por el DIM para la realización de actividades docentes que le son propias.

El texto original, excepto el último capítulo fue elaborado por Axel Osses en el periodo 2002-2007 y posteriormente revisado por Juan Peypouquet el 2008 quien corrigió y agregó varias secciones y ejercicios a lo largo del texto. El Capítulo sobre Cálculo de Variaciones, elaborado por Felipe Alvarez, fue agregado el 2009. Este texto y el material docente de ejercicios que lo acompaña recibió aportes de los siguientes alumnos de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas en el periodo 2002-2008: Francisco Ortega, Oscar Peredo, Andre De Laire, Jorge Lemus y Nicolás Carreño. Los autores agradecen su valiosa colaboración.

Índice general

Capítulo 1. Introducción	1
1. Motivación	1
2. Definiciones básicas y noción de solución de una EDO	5
3. Los teoremas de existencia y unicidad	10
Capítulo 2. Métodos básicos para la resolución de EDO	15
1. Ecuaciones elementales de primer orden	16
2. Ecuaciones que se reducen a casos elementales	29
3. Aproximación de la solución mediante métodos numéricos	40
Capítulo 3. EDO lineales de orden superior	49
1. La EDO lineal de orden n	49
2. Estudio completo de la ecuación de orden dos	52
3. Más sobre la estructura de la solución	60
4. EDO lineal de orden n a coeficientes constantes	66
5. EDO lineal de orden n a coeficientes variables	78
Capítulo 4. Transformada de Laplace	87
1. Definiciones y ejemplos	87
2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace	92
3. Antitransformadas y aplicaciones	98
4. Funciones y derivadas generalizadas	105
Capítulo 5. Sistemas lineales de primer orden	111
1. Introducción	111
2. Sistemas lineales y ecuaciones de orden superior	113
3. Los teoremas de existencia y unicidad	116
4. Estructura de las soluciones	124
5. Resolución de sistemas lineales	129
Capítulo 6. Análisis cualitativo de sistemas no lineales	157
1. Sistemas no lineales y sistemas linealizados	159
2. Diagramas de fase y de flujo	165
3. Clasificación de los puntos críticos	168
4. Puntos críticos de sistemas lineales	175
5. Funciones de Liapunov y estabilidad	186

Capítulo 7. Introducción al Cálculo de Variaciones	193
1. Funcionales y problemas variacionales	193
2. Condiciones necesarias de primer orden: Las ecuaciones de Euler-Lagrange	195
3. Ejemplos	199
4. Ejercicios	201

Capítulo 1

Introducción

1. Motivación

A grandes rasgos, las ecuaciones diferenciales son expresiones que vinculan una función con sus derivadas. Aparecen con frecuencia en casi cualquier rama de la matemática aplicada y sirven para modelar y resolver problemas en física, ingeniería, economía, biología, entre otras. Antes de entrar en formalismos, comenzaremos por comentar algunos ejemplos sencillos donde las ecuaciones diferenciales aparecen de manera natural.

1.1. Modelamiento de un problema físico. Dos medios A y B se encuentran separados por una membrana impermeable en $t = 0$ con concentraciones C_A^0 y C_B^0 con $C_A^0 < C_B^0$. En un instante $t > 0$ la membrana que los separaba se vuelve semipermeable y permite el paso del agua, pero no de las moléculas disueltas (ver Figura 1). A

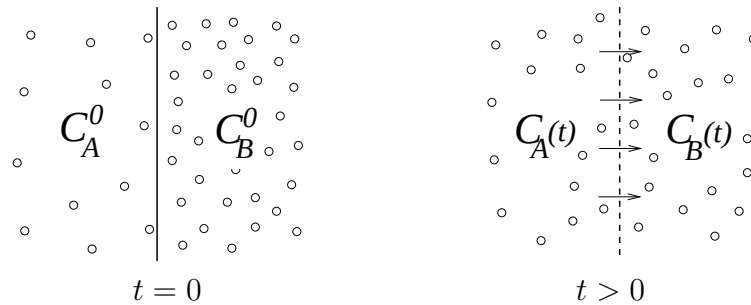


FIGURA 1. Ósmosis por una membrana semipermeable.

medida que el tiempo transcurre, el agua se desplaza a través de la membrana desde la solución de baja concentración A hacia la de alta concentración B hasta alcanzar asintóticamente un valor de equilibrio como se muestra en el gráfico de la Figura 2. Se sabe que el promedio M de concentraciones es conservado a través del tiempo, y por lo tanto conocido e igual al promedio de las concentraciones iniciales, de modo que se puede obtener en cada instante la concentración en B conociendo la de A y viceversa. Si se hace un gráfico semilogarítmico de $\ln(M -$

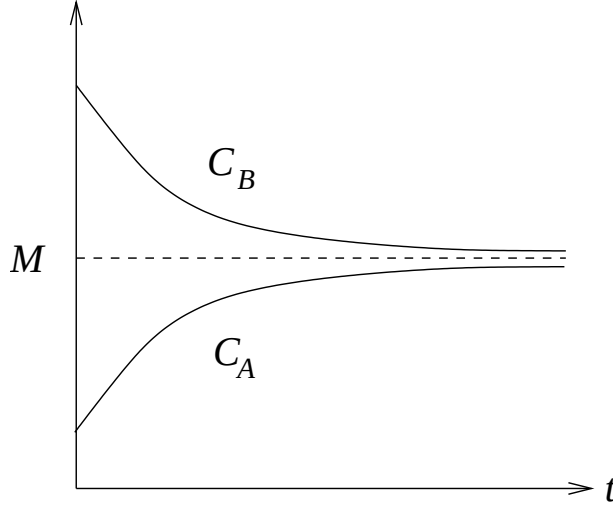


FIGURA 2. Evolución de las concentraciones durante la osmosis. La asíntota es el promedio de las concentraciones de ambos medios $M = \frac{C_A^0 + C_B^0}{2}$.

$C_A(t)$) en función del tiempo, experimentalmente resulta una recta de pendiente negativa $-\sigma$. Una hipótesis razonable es entonces un ajuste exponencial de $C_A(t)$ a la asíntota de ordenada M , esto es,

$$(1) \quad \ln(M - C_A(t)) = -\sigma t + C \quad \Rightarrow \quad C_A(t) = M - K e^{-\sigma t},$$

donde K es una constante que se obtiene imponiendo la condición inicial:

$$(2) \quad C_A(0) = C_A^0 \quad \Rightarrow \quad K = M - C_A^0.$$

Esto nos provee de la fórmula explícita:

$$(3) \quad C_A(t) = M - (M - C_A(0))e^{-\sigma t}.$$

¿Pero hay alguna ley o principio que explique este fenómeno? La idea fundamental consiste en estudiar *si existe una relación simple entre la concentración $C_A(t)$ y su aumento $C'_A(t)$* . Veamos:

$$\begin{aligned} C'_A(t) &= \sigma K e^{-\sigma t} \\ &= \sigma K e^{-\sigma t} + \sigma M - \sigma M \\ &= \sigma(M - (M - K e^{-\sigma t})) \end{aligned}$$

esto es

$$(4) \quad C'_A(t) = \sigma(M - C_A(t)).$$

Tenemos entonces una relación diferencial simple que podemos enunciar como sigue:

“El aumento de concentración en A es proporcional en cada instante a la diferencia de concentración entre el promedio asintótico de concentraciones y la concentración en A . La constante de proporcionalidad es σ cuyo valor numérico cuantifica la permeabilidad de la membrana.” (Ley de Osmosis)

El conocimiento de la ley (4) provee una interpretación más intuitiva de la solución (3), ley que puede por analogía servir para modelar otros problemas similares, como la ley de enfriamiento o los modelos de población, que estudiaremos más adelante. Muchos fenómenos de la naturaleza pueden modelarse a través de relaciones entre cantidades y sus variaciones¹. En términos matemáticos, estamos hablando de identidades que relacionan una función y sus derivadas².

Otro ejemplo emblemático es el movimiento de los planetas alrededor del sol:

“La aceleración de un planeta es proporcional a la fuerza que sobre él ejerce el sol, cuya magnitud es inversa al cuadrado de la distancia que los separa.”

Esta ecuación con dos derivadas del siglo XVII tiene como solución elipses. En realidad también ejercen fuerza sobre él los demás planetas, lo que lleva a órbitas muchísimo más complicadas y al estudio posterior de órbitas caóticas en el siglo XX por Poincaré entre otros.

Sorprendentemente, el movimiento de los planetas hace parte de los fenómenos en los que se conoce una ecuación diferencial que se cree los representa bien, pero no se logra comprender completamente su solución. Es el caso también de las ecuaciones de Navier-Stokes que modelan el movimiento de un fluido tridimensional, y no se sabe si dan lugar o no a una única solución; o el de la ecuación de Schrödinger, que modela la dualidad onda-partícula de manera increíblemente simple.

EJERCICIO PROPUESTO 1.1. Si en el gráfico del experimento de la Figura 2, el aumento de la concentración en A hubiese resultado con una forma sigmoide (esto es estrictamente creciente hacia la asíntota pero con un punto de inflexión) ¿Qué modelo diferencial propondría

¹Idea revolucionaria para la ciencia introducida en el siglo XVII entre otros por Fermat, Newton y Leibniz

²*fluxiones* en la terminología original de Newton, que da además la idea de continuo.

usted para este fenómeno? Indicación: averiguar sobre el modelo de crecimiento logístico.

1.2. Modelamiento de problemas geométricos. Las ecuaciones diferenciales pueden ser también útiles para plantear y resolver problemas geométricos. A modo de motivación, veamos el caso de las *familias ortogonales*. Una ecuación diferencial puede servir para agrupar una familia de curvas, como las tractrices en el punto anterior. También pueden usarse para eliminar el parámetro que indexa la familia. Denotemos por $\mathcal{F}$ la familia de todas las parábolas con vértice en el origen. Ellas están definidas por la ecuación $y = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$. Derivando obtenemos $y' = 2ax$. Sustituyendo en la expresión anterior obtenemos $xy' = 2y$. Esta igualdad vincula a la función con su derivada y con la variable independiente, sin necesidad de utilizar un parámetro adicional. La expresión $y' = 2\frac{y}{x}$ revela además otra propiedad geométrica importante de las curvas en $\mathcal{F}$: su pendiente en cada punto es el doble de la pendiente de la recta que une el punto con el origen. En general, muchas propiedades geométricas compartidas por las curvas de una familia pueden conocerse al inspeccionar la ecuación diferencial correspondiente.

Tratemos ahora de encontrar la familia $\mathcal{G}$ de todas las curvas que intersectan de manera perpendicular a las parábolas antes descritas. Si la función $z \in \mathcal{G}$ define una de estas curvas entonces satisface $z'(x)y'(x) = -1$ para toda $y \in \mathcal{F}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ siempre que $z(x) = y(x)$ (se intersectan). Dado que $y'(x) = \frac{2y(x)}{x}$, la ecuación que define a la familia $\mathcal{G}$ es

$$z'(x) = \frac{-1}{y'(x)} = \frac{-x}{2z(x)}.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} 2z(x)z'(x) &= -x \\ \frac{d}{dx} \left(z(x) \right)^2 &= -x. \end{aligned}$$

Si integramos a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$z(x)^2 = -\frac{x^2}{2} + C,$$

donde C es una constante. Escrito de otro modo, esto es

$$\frac{z^2}{C} + \frac{x^2}{2C} = 1.$$

La familia $\mathcal{G}$ está integrada por todas las elipses que están centradas en el origen con la propiedad de que el cuadrado del semieje horizontal es el doble del cuadrado del semieje vertical.

EJEMPLO 1.1. Otro tipo de problemas geométricos son los del tipo curvas de persecución como el siguiente. Una **tractriz** es una curva con la siguiente propiedad: Si la tangente a la curva por un punto P corta al eje OY en un punto Q , entonces *la distancia entre P y Q permanece constante*. Notemos que si las ruedas delanteras de un auto se mueven sobre una línea recta que no es paralela a su eje longitudinal, entonces las ruedas traseras describen una tractriz pues la distancia entre las ruedas delanteras y las traseras permanece constante.

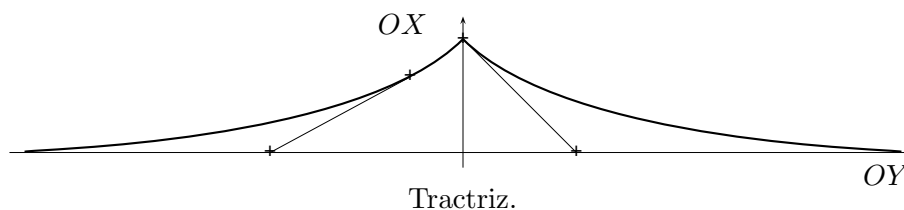
Ahora bien, si $P = (x, y)$ entonces la ordenada Q_y del punto Q satisface

$$\frac{y - Q_y}{x - 0} = y'(x); \quad \text{es decir,} \quad y - Q_y = xy'(x).$$

Si la distancia entre P y Q es constante, también lo es su cuadrado. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (x - 0)^2 + (y - Q_y)^2 &= C \\ x^2 + x^2 [y'(x)]^2 &= C \\ x^2 [1 + y'(x)]^2 &= C, \end{aligned}$$

donde C es una constante positiva.



□

2. Definiciones básicas y noción de solución de una EDO

Una **ecuación diferencial ordinaria** (abreviada EDO) es una identidad de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

donde x es la variable independiente e y es la función incógnita. La función F representa la relación que liga las derivadas de y . Se dice que la ecuación es ordinaria pues se deriva con respecto a una sola variable³.

El **orden** de una ecuación diferencial es el grado de derivación máximo que aparece en la ecuación que en este caso es el número natural⁴ n . Veremos más adelante cómo reducir ecuaciones diferenciales de orden n a sistemas de ecuaciones de primer orden.

EJEMPLO 1.2. $y(1 + (y')^2) = 4$. EDO no lineal, de orden 1. Esta es la EDO de la curva braquistócrona, que estudiaremos más a fondo en el Ejemplo 2.6. $\square$

Una EDO **lineal** de orden n es de la forma

$$(5) \quad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x),$$

con $a_i(x) \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ llamados coeficientes. Si $Q(x) = 0$, la EDO lineal se dice **homogénea**. Si $Q(x) \neq 0$, la EDO lineal se dice **no homogénea**. Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x , se dice que la EDO lineal es a **coeficientes constantes**. De lo contrario se dice que ella es a **coeficientes variables**.

En el caso que $a_n(x) \neq 0$ se puede dividir la EDO (5) por $a_n(x)$. La EDO que así se obtiene con

$$\bar{a}_n(x) = 1, \quad \bar{a}_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_n(x)}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad \bar{Q}(x) = \frac{Q(x)}{a_n(x)}$$

es llamada EDO **normalizada**⁵.

EJEMPLO 1.3. $xy' + c \operatorname{sen}(x)y = \tan(x)$. EDO lineal de orden 1 a coeficientes variables, no homogénea ni normalizada. $\square$

EJEMPLO 1.4. $y'' - 2y = 0$. EDO lineal de orden 2 a coeficientes constantes, homogénea y normalizada. $\square$

En este curso llamaremos **intervalo** al segmento que une dos puntos a y b de la recta real extendida $[-\infty, \infty]$, pudiendo contener o no a los extremos cuando éstos sean finitos. En caso de contener alguno de

³Si se deriva con respecto a varias variables, se habla de Ecuación Diferencial Parcial (EDP).

⁴Existen nociones de derivación de orden más general, que dan lugar a las llamadas Ecuaciones Pseudo Diferenciales (EΨD)

⁵Si $a_n(x) = 0$ para valores discretos de x , se puede normalizar por intervalos.

n	orden de la EDO
$Q(x) = 0$	homogénea
$Q(x) \neq 0$	no homogénea
$\forall i, a_i = \text{cte}$	coeficientes constantes
$\exists i, a_i = a_i(x)$	coeficientes variables
$a_n = 1$	normalizada

CUADRO 1. Clasificación de la EDO lineal $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = Q$.

los extremos, entenderemos que las nociones de continuidad y diferenciabilidad en dicho punto son **laterales**.

Sean I un intervalo y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que una función $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ es **de clase $\mathcal{C}^n$ en I** si las derivadas de y hasta el orden n existen y son continuas en I (entenderemos que la derivada de orden 0 es la propia función y). Denotamos por $\mathcal{C}^n(I)$ el conjunto de las funciones que son de clase $\mathcal{C}^n$ en I . Es fácil ver que dicho conjunto es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y ponderación por escalar. Observemos que cada función $y \in \mathcal{C}^0(I)$ define una **trayectoria** o **curva** en $I \times \mathbb{R}$: $\{(x, z) \mid x \in I, z = y(x)\}$.

Consideremos ahora una función $F : I \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. La primera noción de solución que estudiaremos es la siguiente. Diremos que una función $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ es **solución** o que **define una curva integral** de la ecuación diferencial

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

en el intervalo I si $y \in \mathcal{C}^n(I)$ y

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

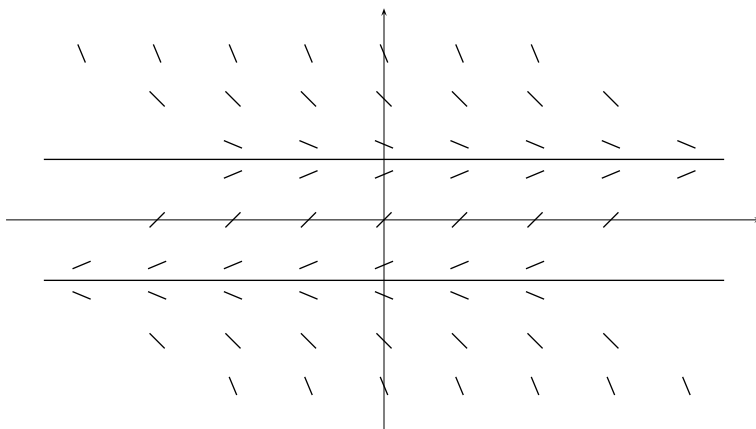
para todo $x \in I$. En lo sucesivo no haremos distinción entre las curvas integrales y las funciones que las definen. Por otra parte, la **solución general** de una ecuación diferencial es una expresión que agrupa, de manera compacta y explícita, la **familia** de todas las soluciones.

EJEMPLO 1.5. Consideremos la ecuación diferencial $y'(x) = 0$ en un intervalo I . Recordemos que la derivada de una función en un intervalo es cero si, y sólo si, la función es constante. Por lo tanto, la solución general de la ecuación es

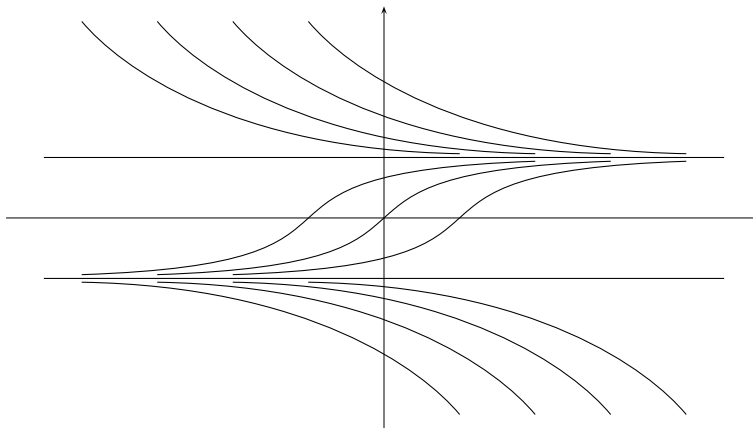
$$y(x) = C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

En muchas ocasiones las ecuaciones diferenciales revelan una gran información cualitativa acerca de las curvas integrales, como vemos en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1.6. Consideremos la ecuación diferencial $y' = 1 - |y|$ en $\mathbb{R}$. En el siguiente capítulo estudiaremos las técnicas que nos permitirán resolver esta ecuación. Veremos también más adelante que las curvas integrales no se intersectan. Sin embargo, al examinar la ecuación diferencial podemos tener una idea de cómo son las curvas integrales. Vemos inmediatamente que las funciones constantes $y(x) \equiv 1$ y $y(x) \equiv -1$ son de clase C^1 y satisfacen $y' = 1 - |y|$ en $\mathbb{R}$, por lo que definen curvas integrales de la EDO. Supongamos ahora que $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define una curva integral de la EDO. En los puntos donde y toma valores entre -1 y 1 , su derivada es positiva; luego y es creciente. En otro caso, y es decreciente. Además mientras más cerca esté $y(x)$ de los valores 1 y -1 , más cercana a 0 será su derivada. Si al contrario, $|y(x)|$ es muy grande, la pendiente será muy pronunciada. En la figura vemos las pendientes que deben tener las curvas integrales a las diferentes alturas.



Otro dato que obtenemos directamente de la ecuación es que si $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define una curva integral, entonces la función $y_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y_c(x) = y(x + c)$ también define una curva integral (basta sustituir en la ecuación). Esto nos dice que al trasladar una curva integral hacia la derecha o hacia la izquierda obtenemos más curvas integrales. Esto es una particularidad de las EDO **autónomas**, en las que no aparece la variable independiente. Con toda esta información deducimos que, de existir, las curvas integrales deben tener un aspecto bastante similar a las que se muestran a en la gráfica. $\square$



En el ejemplo anterior, si bien la ecuación diferencial tiene más de una curva integral, el gráfico sugiere que por cada punto (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ pasa una, y sólo una, de estas curvas. Determinar una (o la) curva integral de una EDO que pasa por cierto punto dado es lo que se conoce como **El problema de Cauchy**. Más precisamente, el problema de Cauchy asociado a una ecuación de primer orden consiste en encontrar $y \in \mathcal{C}^1(I)$ tal que

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \quad \text{para todo } x \in I, \\ y(x_0) &= y_0, \end{cases}$$

donde I es un intervalo, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. La igualdad $y(x_0) = y_0$ se llama **condición inicial** o **de borde** según la variable x se interprete como tiempo o espacio.

OBSERVACIÓN. Una solución del problema de Cauchy es una solución de la ecuación diferencial que se ajusta a las condiciones iniciales o de borde. Es importante no confundirlo con la familia de soluciones de la ecuación diferencial sin condiciones iniciales o de borde.

Dependiendo de f , x_0 e y_0 , el problema de Cauchy puede no tener solución y, en caso de tener, ésta puede no ser única. Los Teoremas 1.1 y 1.2 garantizan la existencia y unicidad de solución bajo ciertas condiciones. Por el momento, veamos bajo qué hipótesis es razonable esperar que el problema de Cauchy asociado a una EDO tenga una única solución.

En primer lugar, para que $y'(x)$ sea continua es necesario que $y(x)$ y $f(x, y(x))$ lo sean. Sin más información sobre la función y luce poco probable que la composición $f(x, y(x))$ sea continua si f no lo es. Es de esperar que necesitemos imponer que la función f sea continua para

garantizar que el problema tenga solución. Sin embargo, esto no es suficiente para obtener la unicidad, como muestra el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1.7. Consideremos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) &= \sqrt{y(x)} & \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

La función constante $y(x) \equiv 0$ es solución, al igual que la función

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^2}{4} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

□

Observemos que la derivada de la función $g(y) = \sqrt{y}$ explota cerca del valor $y = 0$. Más precisamente,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{0}}{y - 0} = \infty.$$

Para probar la unicidad de solución para el problema de Cauchy necesitaremos que el cociente en el límite anterior se mantenga acotado cerca del punto.

3. Los teoremas de existencia y unicidad

Sean $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $L > 0$. Decimos que f es **globalmente Lipschitz** con respecto a la segunda variable, con constante L , si para cada $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ y para cada $x \in I$ se tiene

$$(6) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Enunciaremos ahora el Teorema de Existencia y Unicidad Globales, cuya versión más general está dada por el Teorema 5.2.

TEOREMA 1.1. *Sea I un intervalo. Supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con respecto a su primera variable y globalmente Lipschitz con respecto a su segunda variable. Entonces para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución $y \in C^1(I)$ del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) & \text{para todo } x \in I, \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

El teorema garantiza que la solución existe en todo el intervalo de definición (para la primera variable) de la f . En particular, si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces la solución queda definida en todo $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 1.8. En el ejemplo 1.6 esbozamos las curvas integrales de la ecuación $y' = 1 - |y|$. En este caso tenemos que la $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x, y) = 1 - |y|$. Claramente esta función es continua con respecto a su primera variable. Veamos que es globalmente Lipschitz con respecto a la segunda:

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |1 - |y| - (1 - |z|)| = ||y| - |z|| \leq |y - z|.$$

El Teorema 1.1 nos dice que por cada punto (x, y) del plano para una única curva integral, como se aprecia en la figura del Ejemplo 1.6. $\square$

El que f verifique (6) para todo $x \in I$ y para todos $y, z \in \mathbb{R}$ es una hipótesis bastante restrictiva. Para garantizar existencia y unicidad locales, en realidad basta que la función f sea Lipschitz con respecto a su segunda variable *en un entorno de la condición inicial*. Presentamos a continuación un caso particular del Teorema de Existencia y Unicidad Locales (Teorema 5.4).

TEOREMA 1.2. *Sea I un intervalo. Tomemos $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua (con respecto a su primera variable) en x_0 . Supongamos también que existen $r, \delta, L > 0$ tales que $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$ siempre que $y, z \in [y_0 - r, y_0 + r]$ y $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Denotemos*

$$\begin{aligned} M &= \max\{|f(x, y)| \mid x \in I, |x - x_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq r\}, \\ \delta_0 &= \min\left\{\delta, \frac{r}{M}\right\} \\ y \quad J &= I \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0). \end{aligned}$$

Entonces existe una única solución del problema de Cauchy, al menos en J .

Una función con la propiedad descrita en el teorema decimos que es **localmente Lipschitz** con respecto a su segunda variable **en un entorno de (x_0, y_0)** . Notemos que la solución puede no quedar definida en todo I . De hecho, la solución puede estar definida en un intervalo tanto más chico cuanto más grande sea M .

EJEMPLO 1.9. Consideremos la ecuación $y' = -y^2$, con condición inicial $y(0) = y_0 > 0$. Por el momento sabemos que existe una única solución que está definida cerca de $x_0 = 0$. Primero veamos que la función $f(x, y) = -y^2$ es localmente Lipschitz con respecto a su segunda

variable en un entorno de y_0 . En efecto,

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |y^2 - z^2| = |y + z||y - z| \leq 2(y_0 + r)|y - z|$$

siempre que $y, z \in [y_0 - r, y_0 + r]$ (no hay restricción del tipo $|x - x_0| \leq \delta$). Calculemos los valores de M y δ_0 que da el Teorema 1.2 para saber dónde tenemos garantizada la existencia de una única solución.

$$\begin{aligned} M &= \max\{y^2 \mid |y - y_0| \leq r\} \\ &= (y_0 + r)^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, $\delta_0 = r(y_0 + r)^{-2}$. Pero como todo lo anterior es válido para cualquier $r > 0$ podemos tomar

$$\delta_0 = \max_{r>0} \frac{r}{(y_0 + r)^2} = \frac{1}{4y_0}.$$

Todo lo anterior nos dice que existe una única solución y está definida, al menos, en el intervalo $(-\frac{1}{4y_0}, \frac{1}{4y_0})$.

Por otra parte, observemos que $y(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{y_0}}$ es la solución de la ecuación (en el capítulo siguiente veremos cómo deducir esto). En realidad ella está definida en el intervalo $(-\frac{1}{y_0}, \infty)$, que es más grande de lo que predice el Teorema 1.2. Observemos, sin embargo, que el punto donde y deja de existir está más cerca de $x_0 = 0$ cuando más grande sea y_0 . $\square$

EJEMPLO 1.10. Retomando el Ejemplo 1.7, notemos que la función $f(x, y) = \sqrt{y}$ no es localmente Lipschitz con respecto a y en un entorno de $y_0 = 0$, de modo que el Teorema 1.2 no permite esperar que exista una única solución. Sin embargo, se puede probar fácilmente que la función sí es localmente Lipschitz si tomamos $y_0 > 0$. Se deja al lector verificar esto y encontrar el intervalo de existencia y unicidad de solución que garantiza el teorema. $\square$

Un criterio para comprobar la condición de Lipschitz. La condición de Lipschitz no es fácil de verificar directamente. Un criterio práctico que funciona a menudo es el siguiente. Supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua con respecto a su primera variable y de clase $\mathcal{C}^1$ con respecto a su segunda variable. Con la ayuda del Teorema del Valor Vedio y de la noción de *derivada parcial* (que se estudiará en el curso de Cálculo en Varias Variables) se puede demostrar que f satisface las condiciones del Teorema 1.2.

Los teoremas 1.1 y 1.2 siguen siendo ciertos si F es sólo continua por pedazos (ver definición precisa en la sección 1). Sin embargo, la solución y' es sólo continua por pedazos (se suele decir que y es $\mathcal{C}^1$ por pedazos).

Capítulo 2

Métodos básicos para la resolución de EDO

En este capítulo estudiaremos algunas técnicas que nos permitirán determinar las curvas integrales para una gran cantidad de EDO. Comenzaremos por analizar cuatro tipos de ecuaciones de primer orden que llamaremos **elementales**:

- EDO con integración directa: $y' = f(x)$.
- EDO a variables separables: $y' = f(x)g(y)$.
- EDO lineal de primer orden homogénea: $y' + \bar{a}_0(x)y = 0$.
- EDO lineal de primer orden no homogénea: $y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x)$.

Posteriormente estudiaremos algunas ecuaciones de primer y segundo orden que pueden reducirse a casos elementales. Finalmente daremos una breve introducción a métodos numéricos sencillos que permiten aproximar la solución de una EDO.

Nos enfocaremos en la resolución de las ecuaciones sin ser demasiado rigurosos en los aspectos teóricos que justifican los cálculos pues esto último será tratado con más profundidad en capítulos posteriores.

Recordemos primero el siguiente resultado, conocido como el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC):

TEOREMA 2.1 (TFC). *Sea f integrable en $[a, b]$, entonces, dado $x_0 \in [a, b]$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, la función y , definida por*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s)ds, \quad \text{para } x \in [a, b],$$

es continua en $[a, b]$ y se tiene $y(x_0) = y_0$. Si además f es continua en $[a, b]$ entonces la función $y(x)$ es derivable¹ en $[a, b]$ con derivada

¹Derivable en el cerrado $[a, b]$ significa derivable en el abierto (a, b) y con derivadas laterales en a^+ y b^- .

continua $f(x)$, esto es, se tiene que

$$(7) \quad y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x y'(s) ds, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$(8) \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(s) ds = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

1. Ecuaciones elementales de primer orden

1.1. EDO con integración directa. Consideramos una EDO del tipo

$$(9) \quad y' = f(x).$$

Si la función f es integrable (en particular si es continua), las curvas integrales existen y están definidas por funciones de la forma

$$(10) \quad y = \int f(x) dx + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

OBSERVACIÓN. Se suele denotar por C genéricamente a una constante arbitraria sin importar demasiado las eventuales transformaciones biyectivas que la mantienen arbitraria (ponderaciones por escalar no nulo, cambios de signo, suma de otra constante). En este sentido C , $2C$, $C/\sqrt{2}$, $-C$, $C + 4$ pueden ser representadas por una misma constante genérica C . Sin embargo, si la transformación no es biyectiva, por ejemplo C^2 , entonces se pierde la arbitrariedad y es mejor escribir C^2 o de alguna manera precisar que la constante no puede ser negativa.

EJEMPLO 2.1. Las curvas integrales de la ecuación $y' = \sin(x)$ son de la forma

$$y = \int \sin(x) dx + C = -\cos(x) + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

□

EJEMPLO 2.2. La ecuación $y' = x$ tiene como curvas integrales a las funciones de la forma

$$y = \int x dx + C = \frac{x^2}{2} + C, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

□

EJEMPLO 2.3. Estudiemos ahora la ecuación $y' = \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$.

$$y = \int \frac{dx}{x} + C = \ln(|x|) + C = \ln(|x|) + \ln(k) = \ln(k|x|).$$

En el cálculo anterior hemos reemplazado la constante arbitraria C por $\ln(k)$ (donde $k = e^C > 0$) para escribir la solución de manera más compacta. Observemos también que el módulo en el logaritmo nos da la primitiva correcta de $1/x$ cuando $x < 0$. Como $|x|$ no es derivable en $x = 0$, se considera la resolución de la EDO separadamente en cada intervalo $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. $\square$

Supongamos ahora que queremos encontrar la curva integral definida sobre un intervalo I y que pasa por cierto punto (x_0, y_0) dado. Dicho de otro modo, resolvamos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x) & \text{para todo } x \in I, \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Integramos la ecuación $y' = f(x)$ entre x_0 y $x \in I$:

$$\int_{x_0}^x y'(s)ds = \int_{x_0}^x f(s)ds.$$

Del TFC (identidad (7)), se tiene que

$$(11) \quad y(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds + y(x_0).$$

Detengámonos aquí para comparar (10) y (11). Está claro que la función $F(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds$ en (11) es una primitiva bien particular de f : aquella que cumple $F(x_0) = 0$. Entonces la constante C en (10) deja de ser arbitraria y se tiene que $C = y(x_0)$. Esto nos dice que el problema de Cauchy asociado tiene una única solución para cada condición inicial.

En las ecuaciones de primer orden que estudiaremos en este curso, siempre podremos determinar la constante arbitraria si conocemos el valor de la función en un punto del intervalo².

²Para ecuaciones de orden n necesitaremos conocer los valores de la función y sus derivadas hasta el orden $n - 1$ pues las integraciones sucesivas arrojarán más constantes.

1.2. EDO en variables separables. Una EDO en variables separables tiene la forma:

$$(12) \quad y' = f(x)g(y).$$

Lo primero que observamos es que si $g(y_0) = 0$ entonces la función constante $y(x) \equiv y_0$ define una curva integral de la EDO (12). Para los valores de y donde $g(y) \neq 0$ se tiene $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$. Integrando y usando el Teorema del Cambio de Variables obtenemos

$$(13) \quad \int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante. Si G es una primitiva de $\frac{1}{g}$ y F es una primitiva de f entonces

$$G(y) = F(x) + C.$$

Si queremos una fórmula explícita para las curvas integrales debemos “despejar” y en función de x en la relación anterior³. Si no se puede despejar y , las soluciones quedan expresadas de manera implícita o paramétrica (ver Ejemplo 2.6).

EJEMPLO 2.4. Analicemos la ecuación

$$y' = xy.$$

Aquí $f(x) = x$ y $g(y) = y$. Observemos primero que la función nula $y(x) \equiv 0$ define una curva integral de la EDO. Si $y \neq 0$ hacemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx + C.$$

Tenemos entonces que

$$\ln(|y|) = \frac{x^2}{2} + C,$$

de donde

$$|y| = \exp\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = ke^{\frac{x^2}{2}},$$

donde $k = e^C > 0$. Eliminando el módulo y considerando los posibles valores positivos y negativos vemos que todas las curvas integrales son de la forma

$$y = ke^{\frac{x^2}{2}},$$

con $k \in \mathbb{R}$ (el valor $k = 0$ nos da la solución nula). □

³El Teorema de la Función Implícita, que se estudia en el curso de Cálculo en Varias Variables, da las condiciones para que esto sea posible.

EJEMPLO 2.5. Estudiemos ahora la EDO

$$y' = \cos^2(y).$$

En este caso $f(x) = 1$ y $g(y) = \cos^2(y)$. Las soluciones constantes son de la forma $y(x) \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Para encontrar las demás soluciones,

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\cos^2(y)} &= \int dx + C \\ \int \sec^2(y) dy &= x + C \\ \tan(y) &= x + C, \end{aligned}$$

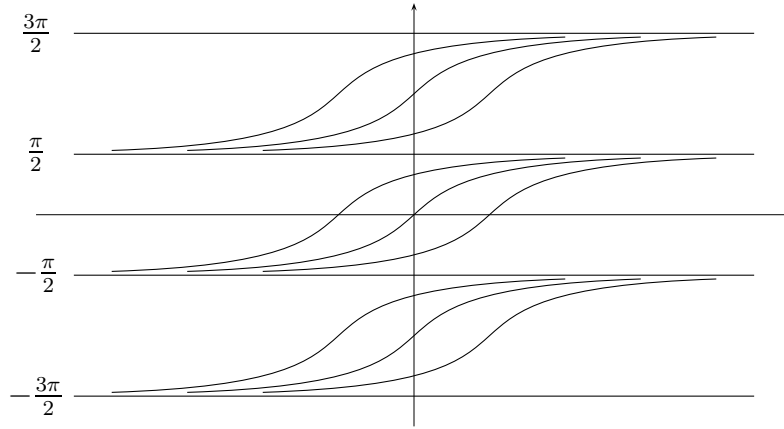
donde $C \in \mathbb{R}$. Para $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ esto es

$$y = \arctan(x + C).$$

Para los demás valores de y debemos tener en cuenta la periodicidad de la función tangente. Tenemos entonces que todas las soluciones no constantes son de la forma

$$y = k\pi + \arctan(x + C),$$

con $C \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$.



□

Para el problema de Cauchy, veamos ahora cómo funciona el método con integrales definidas. Si se integra entre $x_0 \in I$ y $x \in I$ a ambos lados de (12), se tiene que

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Como antes, si G es primitiva de $\frac{1}{g}$ y F es primitiva de f , se tiene que

$$\begin{aligned} G(y(x)) &= F(x) - F(x_0) + G(y(x_0)) \\ &= F(x) + C \end{aligned}$$

con $C = G(y(x_0)) - F(x_0)$ constante. Compare (13) y (14) como se hizo antes entre (10) y (11).

En el siguiente ejemplo la solución queda definida paramétricamente.

EJEMPLO 2.6. [Braquistócrona] Se denomina así a la forma que debe tener un alambre para que una argolla que se desliza por él sin roce bajo la acción de la gravedad de un punto a otro de menor altura y no en la misma vertical, lo haga en el menor tiempo posible.

La EDO que describe la forma de la curva es

$$y(1 + (y')^2) = k^2,$$

donde k es una constante positiva. Utilizando el método de separación de variables, se tiene

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{k^2 - y}{y} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{k^2 - y}} dy &= \int dx + C. \end{aligned}$$

Haciendo $y = k^2 \sin^2 \theta \Rightarrow dy = 2k^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{k \sin \theta 2k^2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{k \cos \theta} &= x + C \\ 2k^2 \int \sin^2 \theta d\theta &= x + C \\ 2k^2 \int \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta &= x + C \\ 2k^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) &= x + C \\ x &= 2k^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) - C. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $x = x(\theta)$ e $y = y(\theta)$ con

$$\begin{aligned} x &= \frac{k^2}{2} (2\theta - \sin 2\theta) - C \\ y &= \frac{k^2}{2} (1 - \cos 2\theta). \end{aligned}$$

Si ahora hacemos $\omega = 2\theta$, vemos que

$$\begin{aligned}x &= \frac{k^2}{2}(\omega - \operatorname{sen} \omega) - C \\y &= \frac{k^2}{2}(1 - \cos \omega),\end{aligned}$$

con $\omega \in \mathbb{R}$. La solución es una familia de curvas llamadas **cicloides**. Ver Figura 1.

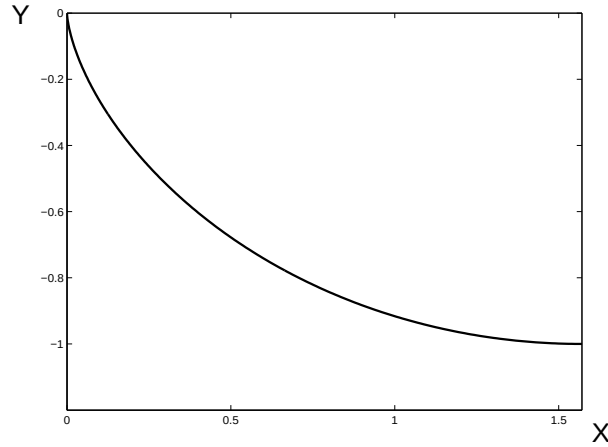


FIGURA 1. Curva Braquistócrona con $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-1, 0]$, parámetro $k = 1$ y constante $C = 0$.

□

EJEMPLO 2.7 (El problema de la gota de lluvia). Consideremos una gota de masa inicial m_0 y de densidad constante que cae del reposo y calculemos su masa en función del tiempo usando el siguiente principio:

“Una gota de lluvia que cae por efecto de su peso va aumentando su volumen a medida que captura gotas más pequeñas en su superficie inferior. Esto es, a una tasa que es proporcional a su velocidad de caída y a su superficie inferior.”

Supondremos que i) la gota es esférica, ii) la gota alcanza una aceleración constante, iii) esta aceleración límite es menor que la de gravedad. Si el radio de la esfera es $r(t)$ entonces su volumen es proporcional a r^3 y su superficie media a r^2 . Si la densidad es constante, entonces la masa es $m(t)$ es proporcional a r^3 de donde despejando $r(t)$ resulta proporcional a $m^{1/3}$. Con esto, suponiendo que y es la distancia recorrida

verticalmente hacia abajo por la gota, la EDO queda:

$$m'(t) = Km^{2/3}y', \quad K > 0 \text{ constante.}$$

Además, la segunda ley de Newton (atención que la masa es variable) es

$$(my')' = mg.$$

Al reemplazar en la primera EDO obtenemos

$$\begin{aligned} m'y' + my'' &= mg \\ Km^{2/3}(y')^2 + my'' &= mg \\ Km^{-1/3}(y')^2 + y'' &= g \\ m^{1/3} &= \frac{K(y')^2}{g - y''}. \end{aligned}$$

Derivando esta expresión vemos que

$$\frac{1}{3} m^{-2/3} m' = \left(\frac{K(y')^2}{g - y''} \right)',$$

de donde

$$\begin{aligned} y' &= 3 \left(\frac{(y')^2}{g - y''} \right)' \\ y' &= 3 \frac{2(g - y'')y'y'' + y'''(y')^2}{(g - y'')^2} \\ y'(g - y'')^2 &= 6(g - y'')y'y'' + 3y'''(y')^2 \\ 3y'''y' &= (g - y'')(g - y'' - 6y'') = (g - y'')(g - 7y''). \end{aligned}$$

Suponiendo que $y'' < g$ y que la aceleración es constante ($y''' = 0$) se obtiene que

$$y'' = \frac{g}{7}.$$

Ahora integrando entre 0 y t una vez (y suponiendo que la gota parte del reposo) se obtiene la velocidad

$$y' = \frac{gt}{7}.$$

Reemplazando este valor en la EDO original de la masa se obtiene

$$m' = \frac{gK}{7} t m^{2/3},$$

que es una EDO a variables separables, que podemos resolver:

$$\begin{aligned}\int m^{-2/3} dm &= \frac{gK}{7} \frac{t^2}{2} + C \\ 3m^{1/3} &= \frac{gK}{14} t^2 + C.\end{aligned}$$

Si la masa inicial era m_0 , entonces $C = 3m_0^{1/3}$. Luego

$$m(t) = \left(\frac{gK}{42} t^2 + m_0^{1/3} \right)^3.$$

□

EJERCICIO PROPUESTO 2.1. ¿Es razonable pensar que la masa crece de manera no acotada con el tiempo? ¿Qué se podría considerar adicionalmente en el modelo para mejorarlo?

1.3. EDO lineal de primer orden: caso homogéneo. Se tiene la EDO:

$$(14) \quad a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Normalizando los coeficientes, es decir, con $\bar{a}_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, $a_1(x) \neq 0$ se obtiene:

$$y' = -\bar{a}_0(x)y.$$

Presentaremos dos enfoques:

Variables separables: Claramente la función nula $y(x) \equiv 0$ define una curva integral para esta EDO. Para los valores donde $y \neq 0$, notamos que la EDO (1.3) es de la forma $y' = f(x)g(y)$ con $f(x) = \bar{a}_0(x)$ y $g(y) = y$. Así

$$\begin{aligned}\ln(|y|) &= - \int \bar{a}_0(x) dx + C \\ |y| &= k \exp \left(- \int \bar{a}_0(x) dx \right), \quad k > 0 \\ y &= k \exp \left(- \int \bar{a}_0(x) dx \right)\end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{R}$, incluyendo la solución nula.

Factor integrante: Definimos $\mu(x) = \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right)$ y observamos que $\mu'(x) = \bar{a}_0(x)\mu(x)$. Si multiplicamos la ecuación por $\mu(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mu(x)y'(x) + \bar{a}_0(x)\mu(x)y(x) &= 0 \\ \mu(x)y'(x) + \mu'(x)y(x) &= 0 \\ (\mu(x)y(x))' &= 0,\end{aligned}$$

con lo cual el producto $\mu(x)y(x)$ es constante y así

$$y(x) = \frac{k}{\mu(x)} = k \exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right)$$

con $k \in \mathbb{R}$, como antes. Este enfoque es la clave para resolver las ecuaciones lineales no homogéneas.

EJEMPLO 2.8. Encontremos las curvas integrales de la ecuación $y' \cos x + \frac{1}{\cos x}y = 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ usando el método de separación de variables. Tenemos que

$$\begin{aligned}y' + \frac{1}{\cos^2 x}y &= 0 \\ y' &= -y \sec^2 x \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \sec^2 x dx + C \\ \ln(|y|) &= -\tan x + C \\ y &= k \exp(-\tan x), \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.9. Resolvamos ahora el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x}y(x) & \text{para } x \neq 0, \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

usando el factor integrante. Escribiendo la EDO como $y' - \frac{1}{x}y = 0$ calculamos

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) = \exp(-\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{x}y &= 0 \\ \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y &= 0 \\ \left(\frac{y}{x}\right)' &= 0 \\ \frac{y}{x} &= k, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Así, todas las curvas integrales son de la forma $y(x) = kx$ con $k \in \mathbb{R}$. De acuerdo con la condición inicial, nos interesa que $2 = y(1) = k \cdot 1$, de donde $k = 2$. Concluimos que la solución del problema de Cauchy es $y(x) = 2x$. $\square$

1.4. EDO lineal de primer orden: caso no homogéneo. Se tiene la ecuación:

$$(15) \quad a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x)$$

Si $a_1(x) \neq 0$ podemos normalizar $\bar{a}_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, $\bar{Q}(x) = \frac{Q(x)}{a_1(x)}$ y reescribir la ecuación como

$$y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x).$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por el factor integrante $\mu(x) = \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right)$ obtenemos

$$\begin{aligned} (\mu(x)y(x))' &= \mu(x)\bar{Q}(x) \\ \mu(x)y(x) &= \int \mu(x)\bar{Q}(x)dx + C \\ y(x) &= \frac{C}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\bar{Q}(x)dx. \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho,

$$y_h(x) = \frac{C}{\mu(x)} = C \exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right)$$

se llama *solución homogénea*. Aunque se habla de *la* solución homogénea, en realidad se trata de una familia de soluciones, indexadas por la constante C . El segundo término,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\bar{Q}(x)dx \\ &= \exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right) \int \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right) \bar{Q}(x)dx \end{aligned}$$

se llama *solución particular* (que se obtiene si $C = 0$). Se habla de la solución particular, pero depende de la primitiva que se escoja.

EJEMPLO 2.10 (Ley de Osmosis). Retomamos el ejemplo de la Introducción donde estudiamos básicamente el movimiento de agua desde una solución con baja concentración de soluto (solución A) a través de una membrana semipermeable hacia una solución con alta concentración de soluto (solución B). Si $C_A(t)$ es la concentración de soluto que hay en la solución A en función del tiempo, C_A^0 es la concentración inicial de soluto en A y si C_B^0 es la concentración inicial de soluto en B, una EDO que modela este fenómeno es:

$$C'_A(t) = \sigma \left(\frac{C_A^0 + C_B^0}{2} - C_A(t) \right), \quad \text{con } \sigma > 0.$$

Introduciendo la concentración promedio $\frac{C_A^0 + C_B^0}{2} = M$, se tiene

$$\begin{aligned} C'_A + \sigma C_A &= \sigma M \\ C'_A \exp \left(\int \sigma dt \right) + \sigma C_A \exp \left(\int \sigma dt \right) &= \sigma M \exp \left(\int \sigma dt \right) \\ C'_A e^{\sigma t} + \sigma C_A e^{\sigma t} &= \sigma M e^{\sigma t} \\ (C_A e^{\sigma t})' &= \sigma M e^{\sigma t} \\ C_A e^{\sigma t} &= \int \sigma M e^{\sigma t} dt + C \\ C_A &= C e^{-\sigma t} + \sigma M e^{-\sigma t} \int e^{\sigma t} dt \end{aligned}$$

y como $\int e^{\sigma t} dt = \frac{1}{\sigma} e^{\sigma t}$, se tiene que

$$C_A(t) = C e^{-\sigma t} + M$$

con $C \in \mathbb{R}$. El resultado es una familia de curvas (indexadas por el parámetro C). Si evaluamos en el tiempo inicial $t = 0$, se puede encontrar el valor de la constante C , es decir, $C_A(0) = C + M$ y $C_A(0) = C_A^0$.

Luego $C = C_A^0 - M = \frac{C_A^0 - C_B^0}{2}$. Por lo tanto, la solución es

$$C_A(t) = \left(\frac{C_A^0 - C_B^0}{2} \right) e^{-\sigma t} + \frac{C_A^0 + C_B^0}{2}$$

□

EJEMPLO 2.11 (Ley de Enfriamiento de Newton). Los más valientes hemos experimentado el hecho de que al bañarnos en el mar cuando se

acerca la noche el agua se siente tibia. Daremos una explicación a este hecho, basados en el siguiente principio:

“Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y el medio ambiente es pequeña, el calor transferido en una unidad de tiempo entre el cuerpo y la atmósfera es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente.” (Ley de enfriamiento de Newton)

Sean T y T_A las temperaturas del mar y del ambiente respectivamente, la EDO que modela el fenómeno es entonces:

$$T'(t) = k(T_A(t) - T(t)),$$

donde $k > 0$ es una constante llamada *coeficiente de transferencia térmica*, y depende localmente de la superficie de contacto, calor específico y masas involucradas. Sea $T(0) = T_0$ es la temperatura inicial del mar.

Supongamos primero que T_A es constante. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} T' + kT &= kT_A \\ T'e^{kt} + kTe^{kt} &= kT_Ae^{kt} \\ (Te^{kt})' &= kT_Ae^{kt} \\ Te^{kt} &= k \int T_Ae^{kt} dt + C \\ T &= Ce^{-kt} + T_A \end{aligned}$$

de donde, evaluando en $t = 0$, se obtiene $C = T_0 - T_A$. Con esto,

$$T(t) = (T_0 - T_A)e^{-kt} + T_A.$$

La temperatura del mar tiende exponencialmente a la temperatura ambiente. Más rápidamente a mayores valores de k . Ver Figura 2.11.

Supongamos ahora que T_A varía en el tiempo de manera periódica. Más precisamente, supongamos que $T_A(t) = T_A^0 + A \sin(\omega t)$, de manera que oscila con frecuencia ω . La solución es

$$(16) \quad T(t) = Ce^{-kt} + T_A^0 + ke^{-kt} \int A \sin(\omega t) e^{kt} dt$$

Desarrollando $\int \sin(\omega t) e^{kt} dt$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega t) e^{kt} dt &= \frac{-1}{k} \int \omega \cos(\omega t) e^{kt} dt + \frac{1}{k} \sin(\omega t) e^{kt} \\ &= \frac{-\omega^2}{k^2} \int \sin(\omega t) e^{kt} dt - \frac{\omega}{k^2} \cos(\omega t) e^{kt} + \frac{1}{k} \sin(\omega t) e^{kt}. \end{aligned}$$

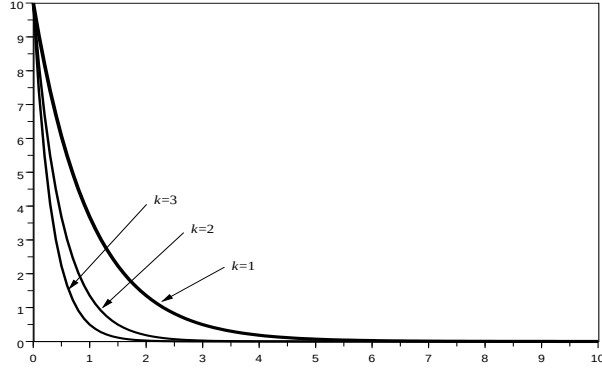


FIGURA 2. Comportamiento de la temperatura del mar $T(t)$ frente a una temperatura ambiente constante $T_A = 0$ partiendo de una temperatura inicial $T(0) = 10$ para distintos valores de la constante k .

Esto implica que

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{k^2}\right) \int \sin(\omega t) e^{kt} dt = \frac{e^{kt}}{k} \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{k} \cos(\omega t) \right).$$

Luego, $\int A \sin(\omega t) e^{kt} dt = \frac{Ak}{k^2 + \omega^2} e^{kt} \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{k} \cos(\omega t) \right)$. Por lo tanto (16) queda de la forma

$$T(t) = C e^{-kt} + T_A^0 + \frac{Ak^2}{k^2 + \omega^2} \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{k} \cos(\omega t) \right).$$

□

Si consideramos $\sin \phi = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \omega^2}}$ y $\cos \phi = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \omega^2}}$ podemos escribir

$$T(t) = C e^{-kt} + T_A^0 + \frac{Ak}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \underbrace{(\sin(\omega t) \cos(\phi) - \cos(\omega t) \sin(\phi))}_{\sin(\omega t - \phi)}.$$

Finalmente, $T(t) = \underbrace{C e^{-kt}}_{y_h} + T_A^0 + \underbrace{\frac{Ak}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \phi)}_{y_p}$. Las varia-

ciones de la temperatura del mar se encuentran asintóticamente retrasadas o *con desfase positivo* con respecto a las del ambiente (ver Figura 3). Además, notar que la amplitud asintótica de la temperatura

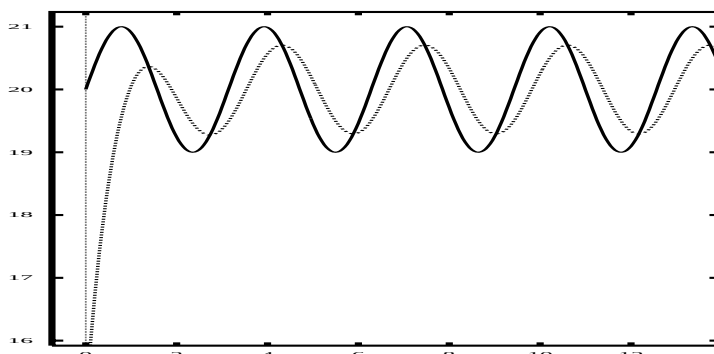


FIGURA 3. Variación de la temperatura del mar $T(t)$ inicialmente con $T(0) = 15$ frente a una temperatura ambiente $T_A(t) = 20 + \sin(2t)$ (línea gruesa). Asintóticamente, $T(t)$ tiene un desfase positivo y una amplitud menor respecto de $T_A(t)$.

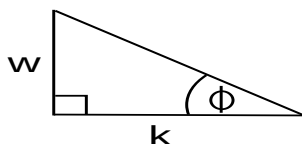


FIGURA 4. Relación entre ϕ , k y ω .

del cuerpo es menor que la amplitud de variación de la temperatura ambiente ya que $k/\sqrt{k^2 + \omega^2} < 1$.

EJERCICIO PROPUESTO 2.2. Explique cómo se puede estimar el coeficiente k a partir del tiempo que separa dos máximos sucesivos de la temperatura ambiente y de la temperatura del mar.

2. Ecuaciones que se reducen a casos elementales

Veremos ahora algunas ecuaciones diferenciales que se pueden reducir a casos elementales mediante un cambio de variables.

2.1. Ecuaciones homogéneas. Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables y $k \in \mathbb{N}$. Se dice que f es **homogénea de grado k** si $f(\lambda x, \lambda y) = \pm \lambda^k f(x, y)$ para cada $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$. Observemos que si f y g son homogéneas de grado k entonces el cociente $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ puede escribirse

como una función que depende únicamente del cociente entre x e y . En efecto,

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{f(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x})}{g(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x})} = \frac{\pm x^k f(1, \frac{y}{x})}{\pm x^k g(1, \frac{y}{x})} = \pm \frac{f(1, \frac{y}{x})}{g(1, \frac{y}{x})} = h\left(\frac{y}{x}\right).$$

Una EDO es **homogénea** si se puede escribir como

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right).$$

Para resolverlas hacemos el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$, que reescribimos como $y = xz$ de manera que $y' = xz' + z$. Tenemos entonces que $xz' + z = h(z)$, de donde

$$z' = \frac{h(z) - z}{x},$$

que es una ecuación en variables separables.

EJEMPLO 2.12. Encontrar las curvas integrales de la ecuación

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

Es fácil verificar que se trata de una ecuación homogénea. Hacemos el cambio $z = y/x$, de donde $y = zx$ e $y' = z + xz'$. La ecuación se convierte en

$$z + xz' = \frac{x + zx}{x - zx} = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Despejando z' obtenemos

$$z' = \frac{1}{x} \left[\frac{1 + z}{1 - z} - z \right] = \frac{1}{x} \left[\frac{1 + z^2}{1 - z} \right].$$

Para resolver esta ecuación en variables separables hacemos

$$\begin{aligned} \left[\frac{1 - z}{1 + z^2} \right] z' &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{dz}{1 + z^2} - \int \frac{z dz}{1 + z^2} &= \int \frac{dx}{x} \\ \arctan(z) - \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) &= \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Si ahora deshacemos el cambio de variables obtenemos la solución expresada de manera implícita:

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \ln \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \ln|x| + C.$$

□

EJEMPLO 2.13 (Curva de persecución). Sobre un río, en la posición $P = (c, 0)$, un bote trata de alcanzar la orilla situada en la posición $O = (0, 0)$ como se muestra en la Figura 2.13. Se quiere caracterizar la posición en el eje OY con respecto a la posición en el eje OX. La rapidez de la corriente del río es a en dirección $(0, -1)$. La rapidez del bote es b en dirección $(-\cos \theta, \sin \theta)$ donde $\theta = \theta(t)$ va variando en el tiempo de manera que este vector apunta siempre hacia O . Si las coordenadas del bote en un tiempo dado son $B = (x, -y)$, la rapidez en cada eje esta dada por

$$\frac{dx}{dt} = -b \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = b \sin \theta - a.$$

Aplicando regla de la cadena tenemos que $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$. Recordando

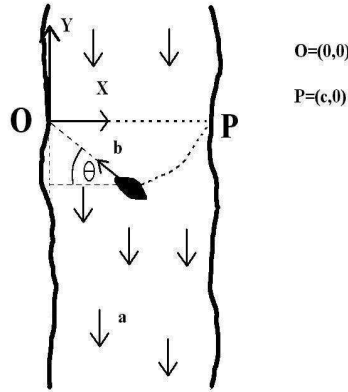


FIGURA 5. Bote con rapidez b cruzando un río cuya corriente tiene rapidez a .

que $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}$ y $\sin \theta = \frac{-y}{\sqrt{y^2 + x^2}}$ vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{b \sin \theta - a}{-b \cos \theta} \right) = \frac{-a + b \left(\frac{-y}{\sqrt{y^2 + x^2}} \right)}{-b \left(\frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}} \right)} = \frac{-a \sqrt{x^2 + y^2} - by}{-bx}.$$

Esta última ecuación es homogénea. Hacemos el cambio de variable $z = \frac{y}{x} \Rightarrow xz' + z = y'$. Recordando que x y y son positivas tenemos que

$$\begin{aligned} xz' + z &= \frac{a}{b}\sqrt{1+z^2} + z \\ \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{a}{bx} \\ \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{a}{b} \ln x + C. \end{aligned}$$

Reescribimos la constante C como $C = \frac{a}{b} \ln k$ con $k > 0$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \ln(z + \sqrt{1+z^2}) &= \ln(kx)^{\frac{a}{b}} \\ z + \sqrt{1+z^2} &= (kx)^{\frac{a}{b}} \\ 1 + z^2 &= (kx)^{\frac{2a}{b}} - 2z(kx)^{\frac{a}{b}} + z^2. \end{aligned}$$

Despejando z y deshaciendo el cambio de variables obtenemos

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} [(kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{-\frac{a}{b}}] \\ \frac{y}{x} &= \frac{1}{2} [(kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{-\frac{a}{b}}] \\ y &= \frac{x}{2} [(kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{-\frac{a}{b}}]. \end{aligned}$$

De la condición de borde $y(c) = 0$ vemos que $k = \frac{1}{c}$.

□

2.2. Ecuación de Bernoulli. La ecuación de Bernoulli es de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad \text{con } n \neq 0, n \neq 1.$$

Se realiza el cambio de variable $z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'$. Multiplicando $(1-n)y^{-n}$ a ambos lados de la ecuación, queda

$$\begin{aligned} (1-n)y^{-n}y' + p(x)(1-n)y^{1-n} &= (1-n)q(x) \\ z' + p(x)(1-n)z &= (1-n)q(x), \end{aligned}$$

que resulta ser una ecuación lineal no homogénea de primer orden normalizada.

EJEMPLO 2.14 (Modelo Logístico de población). El modelo logístico se basa en el siguiente principio:

“El aumento de una población es proporcional al producto entre la población misma y su diferencia respecto a un

valor máximo que es función de los recursos disponibles limitados.” (Ley logística)

Esto traducido a una EDO queda como

$$(17) \quad P' = \sigma P(M - P),$$

donde $\sigma > 0$ es constante (por ejemplo la diferencia entre tasas de natalidad y mortalidad) y $M > 0$ es la carga máxima alcanzable. Si $P > M$ entonces P' es negativo y la población decrece. En esta ecuación de Bernoulli hacemos el cambio de variables $z = \frac{1}{P} \Rightarrow z' = \frac{-P'}{P^2}$ y obtenemos

$$z' = -M\sigma z + \sigma,$$

de donde

$$\frac{1}{P} = \exp\left(-\int_0^t M\sigma(s)ds\right) \left(\frac{1}{P_0} + \int_0^t \exp\left(\int_0^s M\sigma(s)ds\right) \sigma(s)ds\right).$$

Reordenando se obtiene

$$(18) \quad P = \frac{P_0 M}{P_0 + (M - P_0) \exp(-M\sigma t)}.$$

Notemos que $P(0) = P_0$ y que $P \rightarrow M$ si $t \rightarrow \infty$.

□

2.3. Ecuación de Riccati. La ecuación de Riccati es de la forma

$$(19) \quad y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

Se realiza el cambio de variable $y = y_1 + \frac{1}{z}$, donde y_1 es alguna solución conocida (por ejemplo fácil de calcular) de (19). Derivando con respecto a x se tiene $y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$ y reemplazando en (19),

$$\begin{aligned} y_1' - \frac{z'}{z^2} &= p(x) \left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + q(x) \left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + r(x) \\ y_1' - \frac{z'}{z^2} &= p(x)y_1^2 + 2p(x)\frac{y_1}{z} + \frac{p(x)}{z^2} + q(x)y_1 + \frac{q(x)}{z} + r(x) \\ y_1' - \frac{z'}{z^2} &= [p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x)] + 2p(x)\frac{y_1}{z} + \frac{p(x)}{z^2} + \frac{q(x)}{z} \\ z' &= -2p(x)y_1z - p(x) - q(x)z, \end{aligned}$$

de donde

$$z' + (2p(x)y_1 + q(x))z = -p(x),$$

que resulta ser una EDO lineal de primer orden no homogénea en la variable z .

EJEMPLO 2.15. Analicemos la ecuación diferencial

$$y' = -2 - y + y^2.$$

Como se trata de una ecuación de primer orden a coeficientes constantes, es posible encontrar una solución constante resolviendo la ecuación *algebraica*

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

cuyas raíces son 2 y -1 . Tomemos entonces $y_1 = 2$ como una solución particular de la ecuación. Siguiendo el procedimiento descrito arriba podemos encontrar la solución general haciendo el cambio

$$y = y_1 + \frac{1}{z} = 2 + \frac{1}{z}, \quad y' = -\frac{z'}{z^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{z'}{z^2} &= -2 - \left(2 + \frac{1}{z}\right) + \left(2 + \frac{1}{z}\right)^2 \\ -\frac{z'}{z^2} &= -2 - 2 - \frac{1}{z} + 4 + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} \\ -z' &= 3z + 1. \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación lineal de primero orden no homogénea multiplicando por el factor integrante $\mu(x) = \exp(\int 3dx) = e^{3x}$.

$$\begin{aligned} z'e^{3x} + 3ze^{3x} &= -e^{3x} \\ (ze^{3x})' &= -e^{3x} \\ ze^{3x} &= -\frac{1}{3}e^{3x} + C, \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Despejando encontramos $z(x) = -\frac{1}{3} + Ce^{-3x}$. Esto nos dice finalmente que la solución general de la ecuación es

$$y(x) = 2 + \frac{1}{Ce^{-3x} - \frac{1}{3}}, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

Notemos que tomando $C = 0$ recuperamos la otra solución constante $y(x) \equiv -1$. Es importante observar también que si $C > 0$ la solución tiene una asíntota vertical en $x = \frac{1}{3} \ln(3C)$, de modo que $|y(x)| \rightarrow \infty$ si $x \rightarrow \frac{1}{3} \ln(3C)$. $\square$

2.4. EDO de segundo orden sin variable dependiente. En la ecuación

$$G(x, y', y'') = 0$$

no aparece la variable y explícitamente. En estos casos se realiza el cambio de variable $p = y'$, con lo cual la ecuación se transforma en

$$G(x, p, p') = 0,$$

que es una EDO de primer orden.

EJEMPLO 2.16. Para resolver la ecuación

$$y' = \frac{x}{1+x} y'' - 1$$

hacemos el cambio $p = y'$, $p' = y''$. Luego,

$$\begin{aligned} p + 1 &= \frac{x}{1+x} p' \\ 1 + \frac{1}{x} &= \frac{p'}{p+1} \\ \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx &= \int \frac{dp}{p+1} \\ x + \ln|x| + C &= \ln|p+1| \end{aligned}$$

y de allí,

$$p = -1 + kxe^x \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R}.$$

En términos de y esto es una ecuación con integración directa

$$\begin{aligned} y' &= -1 + kxe^x \\ y &= -x + k(x-1)e^x + K \quad \text{con} \quad k, K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

2.5. EDO de segundo orden sin variable independiente.

En la ecuación

$$H(y, y', y'') = 0$$

la variable independiente x no aparece explícitamente. Se realiza el cambio de variable

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

con lo cual la ecuación se transforma en

$$H\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

que es una EDO de primer orden en la variable p con variable independiente y .

EJEMPLO 2.17 (Ley de Hooke). Se tiene el sistema indicado en la Figura 2.17, siendo $k > 0$ constante de elasticidad del resorte y m la masa del cuerpo. La Ley de Hooke establece que:

“Para pequeños desplazamientos en torno a la posición de equilibrio, la fuerza de restitución del resorte es proporcional al desplazamiento”. (Ley de Hooke)

Esto es $my'' = -ky$. Es decir, $y'' + w^2y = 0$, con $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Si $z = y'$ entonces $z' = \frac{dz}{dy}y'$ y la ecuación se reescribe como

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dy}z + w^2y &= 0 \\ \frac{dz}{dy}z &= -w^2y.\end{aligned}$$

Integrando con respecto a la variable y vemos que

$$\begin{aligned}\int z dz &= -w^2 \int y dy + C \\ \frac{z^2}{2} &= -w^2 \frac{y^2}{2} + C \\ (y')^2 &= -w^2 y^2 + 2C \\ y' &= \sqrt{2C - w^2 y^2}.\end{aligned}$$

Finalmente usando separación de variables obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{\sqrt{2C - w^2 y^2}} &= \int dt + \phi \\ \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{2C} y^2}} &= \int \sqrt{2C} dt + \phi \\ \arcsen\left(\frac{wy}{\sqrt{2C}}\right) &= \sqrt{2C}t + \phi \\ \frac{wy}{\sqrt{2C}} &= \sen(\sqrt{2C}t + \phi) \\ y &= \frac{\sqrt{2C}}{w} \sen(\sqrt{2C}t + \phi) \quad \text{con } C, \phi \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

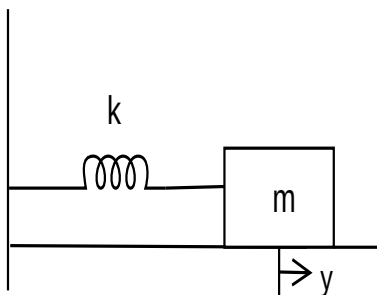


FIGURA 6. Sistema mecánico de un resorte y una masa.

EJEMPLO 2.18 (Cadena cayendo). Para el sistema de la segunda figura, el largo de la cadena es L y su densidad es ρ [masa / largo], por lo tanto la EDO que lo describe es

$$\begin{aligned}\rho L y'' &= \rho g y \\ y'' - \frac{g}{L} y &= 0.\end{aligned}$$

Definiendo $\sigma = \sqrt{\frac{g}{L}}$ se tiene la EDO $y'' - \sigma^2 y = 0$. El mismo cambio de variable nos da

$$\begin{aligned}z \frac{dz}{dy} - \sigma^2 y &= 0 \\ z \frac{dz}{dy} &= \sigma^2 y \\ \frac{z^2}{2} &= \sigma^2 \frac{y^2}{2} + C \\ z &= \sqrt{\sigma^2 y^2 + 2C} \\ y' &= \sigma \sqrt{y^2 + a^2} \quad \text{con} \quad a = \frac{2C}{\sigma^2}.\end{aligned}$$

Esto es

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + a^2}} = \sigma \int dt = \sigma t + \phi.$$

Haciendo el cambio de variable $y = a \sinh \theta$ en el lado izquierdo,

$$\begin{aligned}\int \frac{a \cosh \theta}{a \cosh \theta} d\theta &= \sigma t + \phi \\ \theta &= \sigma t + \phi.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = a \sinh(\sigma t + \phi)$, con $\phi \in \mathbb{R}$ constante. □

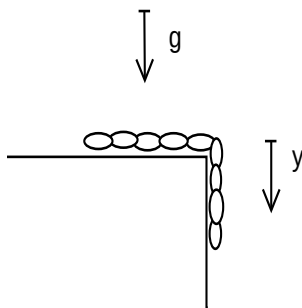


FIGURA 7. Sistema mecánico de una cadena bajo el efecto de g con un extremo cayendo.

2.6. Otros casos. En ocasiones es posible reducir una ecuación complicada a otra más simple mediante un cambio de variables. No hay una regla general para determinar el cambio correcto, de modo que la experiencia es clave.

EJEMPLO 2.19. La ecuación

$$y' = (x + y)^2$$

es de Ricatti. Sin embargo, para aplicar el método descrito más arriba es necesario conocer una solución particular, lo que puede no ser evidente. Otra opción es usar el cambio $w = x + y$. Esto nos da $w' = 1 + y'$ y la ecuación se transforma en

$$w' = w^2 + 1,$$

que es una ecuación en variables separables. Para hallar la solución general hacemos

$$\int \frac{dw}{w^2 + 1} = \int dx,$$

de donde $\arctan(w) = x + C$. Esto es

$$y = -x + \tan(x + C), \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

EJEMPLO 2.20. En la ecuación

$$y' = \frac{\cos(x + y + 1)}{1 - \cos(x + y + 1)}$$

podemos hacer el cambio $z = x + y + 1$. Con esto, $z' = y' + 1$ y la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{1 - \cos(z)} \\ \int (1 - \cos(z)) dz &= \int dx \\ z - \sin(z) &= x + C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La solución queda definida implícitamente como

$$y - \sin(x + y + 1) = C.$$

□

Otro procedimiento útil es integrar la variable independiente en términos de la variable dependiente y luego despejar. La justificación, a grandes rasgos y sin entrar en detalles, es la siguiente: en los intervalos donde y' existe y no se anula, la expresión $y = y(x)$ define implícitamente a x en función de y . Es decir, podemos escribir $x = x(y)$. Observando que $x(y(x)) = x$ y usando la regla de la cadena vemos que

$$\begin{aligned} x'(y(x))y'(x) &= 1 \\ x'(y) &= \frac{1}{y'(x)}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.21. La ecuación

$$y'(e^y - x) = y$$

puede escribirse como

$$\frac{e^y - x}{y} = \frac{1}{y'} = x'.$$

Esta es una ecuación lineal de primer orden en x si se toma y como variable:

$$x' + \frac{1}{y}x = \frac{1}{y}e^y.$$

Multiplicando por el factor integrante $\mu(y) = y$ esto nos da

$$\begin{aligned} (xy)' &= e^y \\ xy &= e^y + C \end{aligned}$$

y la solución queda definida de manera implícita.

Otra manera de resolver la ecuación es

$$\begin{aligned}y'x + y &= e^y y' \\ (xy)' &= (e^y)' \\ xy &= e^y + C.\end{aligned}$$

□

3. Aproximación de la solución mediante métodos numéricos

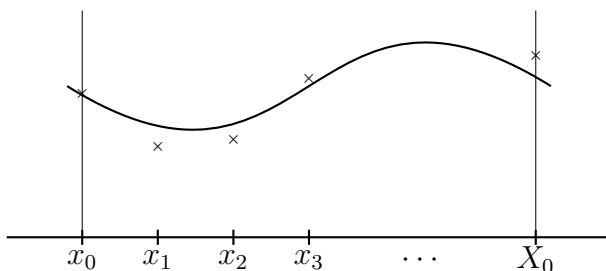
En esta sección presentaremos algunos métodos numéricos básicos que se pueden utilizar para aproximar la solución $y(x)$ de un problema de Cauchy del tipo

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \text{para todo } x \in [x_0, X_0], \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

En primer lugar dividimos $[x_0, X_0]$ en N pequeños subintervalos de la misma longitud: para ello, escribimos $h = \frac{X_0 - x_0}{N}$ y para $n = 1, \dots, N$ definimos $x_n = x_0 + nh$, de manera que $x_N = X_0$ y

$$[x_0, X_0] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{N-1}, x_N].$$

La idea es encontrar puntos $\{y_1, \dots, y_N\}$ tales que el error $e_n = |y_n - y(x_n)|$ sea pequeño para cada $n = 1, \dots, N$.



Solución exacta y su aproximación en el intervalo $[x_0, X_0]$.

Integrando la ecuación diferencial en cada subintervalo $[x_n, x_{n+1}]$ obtenemos

$$(20) \quad y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds.$$

La manera de aproximar la integral que aparece del lado derecho nos dará diversos métodos para encontrar los puntos $\{y_n\}_{n=1}^N$.

3.1. Métodos de primer orden. La manera más obvia de aproximar la integral en (20) es usar un rectángulo. Esto nos da los métodos de Euler de primer orden, de acuerdo con el extremo del intervalo que usemos para definir la altura del rectángulo.

Método de Euler progresivo: Empezamos haciendo $y(x_0) = y_0$. Aproximamos la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(s, y(s)) ds$$

por el área del rectángulo con base en el segmento $[x_0, x_1]$ y cuya altura esta dada por el valor del integrando en el extremo izquierdo del intervalo $[x_0, x_1]$. Tenemos que

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(s, y(s)) ds \sim (x_1 - x_0) f(x_0, y(x_0)),$$

de donde

$$y(x_1) \sim y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Esto sugiere definir

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

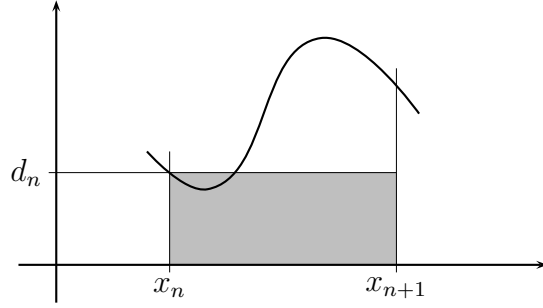
Inductivamente, para $n = 1, \dots, N - 1$ definimos

$$(21) \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Observemos que esto es equivalente a

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n) =: d_n.$$

El cuociente del lado izquierdo es una aproximación de la derivada de la función y . Se dice que éste es un método **explícito** pues la expresión (21) nos da una fórmula para y_{n+1} en términos del valor conocido y_n .



Método de Euler progresivo: $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim d_n(x_{n+1} - x_n).$

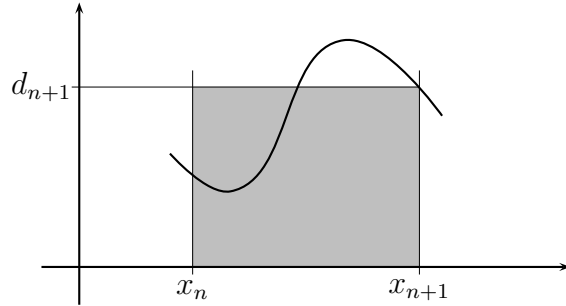
Método de Euler retrógrado: Esta vez aproximamos la integral utilizando el valor del integrando en el extremo derecho de cada subintervalo. Para $n = 0, \dots, N - 1$ definimos

$$(22) \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

lo que equivale a

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Se dice que este es un método **implícito** pues es necesario resolver la ecuación (22), que generalmente es no lineal, para determinar y_{n+1} . Este proceso puede ser difícil, lo cual representa una desventaja de este método. Sin embargo, el método de Euler retrógrado (y los métodos implícitos en general) goza de mejores propiedades de estabilidad, concepto que presentaremos más adelante.



Método de Euler retrógrado: $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim d_{n+1}(x_{n+1} - x_n).$

3.2. Métodos de segundo orden. Los métodos de segundo orden utilizan dos aproximaciones sucesivas para calcular la integral, basadas en el valor del integrando en dos puntos distintos del subintervalo.

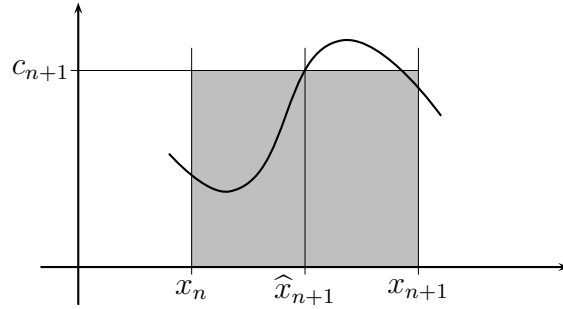
Los que presentamos a continuación son casos especiales de los llamados **Esquemas de Runge-Kutta**.

Método de Euler modificado: También se basa en una aproximación de la integral por un rectángulo, pero esta vez se toma el valor del integrando en el punto medio del subintervalo $\hat{x}_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}$. Dicho valor es $f(\hat{x}_{n+1}, y(\hat{x}_{n+1}))$. Es necesario estimar el valor de $y(\hat{x}_{n+1})$, para lo cual se utiliza el método de Euler progresivo (en lugar de resolver una ecuación no lineal). Así, cada iteración del algoritmo tiene dos etapas. Primero calculamos

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n),$$

que aproxima el valor de $y(\hat{x}_{n+1})$. Luego hacemos

$$y_{n+1} = y_n + h f(\hat{x}_{n+1}, \hat{y}_{n+1}).$$



Método de Euler modificado: $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim c_{n+1}(x_{n+1} - x_n)$.

Método de Heun: En esta ocasión utilizamos la regla de los trapecios para aproximar la integral:

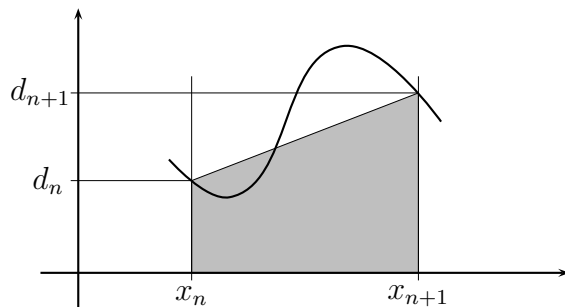
$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})].$$

Al igual que en el método de Euler modificado, estimaremos el valor de $y(x_{n+1})$ usando el método de Euler progresivo. Así, definimos

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

y luego calculamos

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})].$$



Método de Heun: $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim \frac{1}{2}(d_{n+1} + d_n)(x_{n+1} - x_n).$

EJEMPLO 2.22. Estudiemos el problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + e^x & \text{para } x \in (0, 1), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Se trata de una ecuación lineal de primer orden no homogénea que sabemos resolver.

$$\begin{aligned} y' - y &= e^x \\ e^{-x}y' - e^{-x}y &= 1 \\ (e^{-x}y)' &= 1 \\ e^{-x}y &= x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la condición inicial, vemos que la solución es

$$(23) \quad y(x) = e^x(x + 1).$$

Veamos ahora cómo funcionan los métodos descritos arriba. Para ello dividimos el intervalo $[0, 1]$ en 20 subintervalos de longitud 0,05. La siguiente tabla muestra los valores que da la ecuación diferencial (ED) mediante la fórmula (23), los métodos de Euler progresivo (EP), de Euler retrógrado (ER), de Euler modificado (EM) y de Heun (H), junto con los errores cometidos al aplicar cada método.

□

3.3. Estabilidad. A grandes rasgos, un método es estable en la medida en que los valores que entrega se mantienen cerca de la curva integral que se pretende aproximar. Es decir, si el error $e_n = |y_n - y(x_n)|$ es pequeño. Hay diferentes criterios de estabilidad, pero nosotros nos centraremos en la llamada “estabilidad asintótica”, que tiene que ver con el comportamiento a largo plazo.

X	ED	EP	Error	ER	Error	EM	Error	H	Error
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0.05	1.104	1.100	0.004	1.108	0.004	1.104	0.000	1.104	0.000
0.10	1.216	1.208	0.008	1.224	0.009	1.216	0.000	1.216	0.000
0.15	1.336	1.323	0.013	1.350	0.014	1.336	0.000	1.336	0.000
0.20	1.466	1.447	0.018	1.485	0.020	1.465	0.000	1.465	0.000
0.25	1.605	1.581	0.024	1.631	0.026	1.605	0.000	1.605	0.000
0.30	1.755	1.724	0.031	1.788	0.033	1.754	0.001	1.754	0.000
0.35	1.916	1.878	0.038	1.957	0.041	1.915	0.001	1.915	0.001
0.40	2.089	2.043	0.046	2.138	0.050	2.088	0.001	2.088	0.001
0.45	2.274	2.219	0.055	2.333	0.059	2.273	0.001	2.273	0.001
0.50	2.473	2.409	0.064	2.543	0.070	2.472	0.001	2.472	0.001
0.55	2.687	2.612	0.075	2.768	0.082	2.685	0.001	2.685	0.001
0.60	2.915	2.829	0.086	3.010	0.094	2.914	0.002	2.914	0.001
0.65	3.161	3.061	0.099	3.269	0.108	3.159	0.002	3.159	0.001
0.70	3.423	3.310	0.113	3.547	0.124	3.421	0.002	3.422	0.002
0.75	3.705	3.577	0.128	3.845	0.140	3.702	0.002	3.703	0.002
0.80	4.006	3.861	0.145	4.165	0.159	4.003	0.003	4.004	0.002
0.85	4.328	4.166	0.163	4.507	0.178	4.325	0.003	4.326	0.002
0.90	4.673	4.491	0.182	4.873	0.200	4.670	0.003	4.671	0.003
0.95	5.042	4.838	0.204	5.266	0.224	5.038	0.004	5.039	0.003
1	5.437	5.210	0.227	5.686	0.250	5.432	0.004	5.433	0.003

CUADRO 1. Desempeño de los métodos estudiados

Supongamos que se quiere aproximar la solución de un problema de Cauchy del tipo

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \text{para todo } x \in [x_0, \infty), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

Tomamos $h > 0$ y definimos $x_n = x_0 + nh$, de manera que

$$[x_0, \infty) = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots$$

Calculamos los valores de y_n que nos entrega el algoritmo y los comparamos con los valores de la solución exacta del problema de Cauchy. Diremos que un método de aproximación es

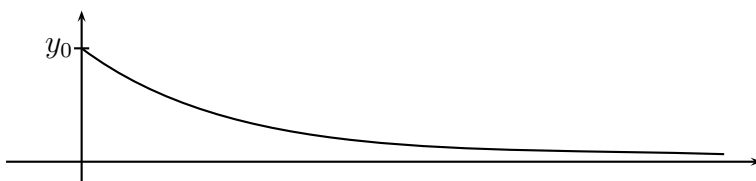
1. **incondicionalmente estable** si $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)| = 0$ para cualquier valor de $h > 0$.
2. **condicionalmente estable** si $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)| = 0$ para algunos valores de $h > 0$.
3. **inestable** si $|y_n - y(x_n)|$ no converge a cero para ningún valor de $h > 0$.

Para entender mejor este concepto analizaremos la estabilidad de los métodos de primer orden descritos arriba al momento de aproximar ciertas ecuaciones.

EJEMPLO 2.23. Estudiaremos el problema

$$\begin{cases} y'(x) = -ay(x) & \text{para } x \in (0, \infty), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

con $a > 0$ e $y_0 > 0$. Se trata de una ecuación lineal de primer orden cuya solución es $y(x) = y_0 e^{-ax}$. Observemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ para todos los valores de a e y_0 . Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n) = 0$.



Solución de la ecuación diferencial.

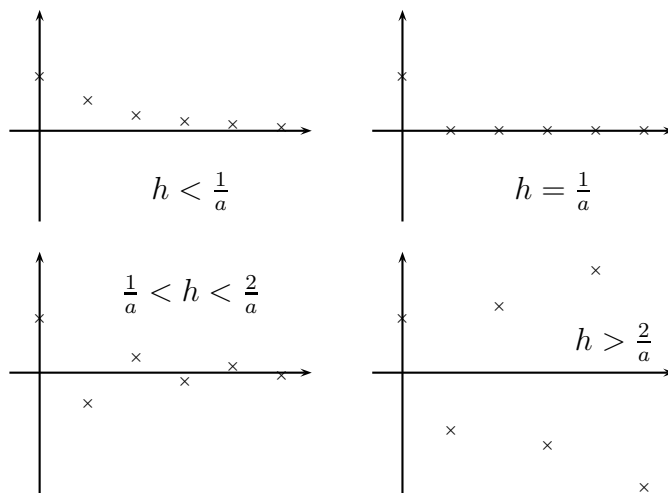
Al aplicar el método de Euler progresivo tenemos

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(-ay_n) = (1 - ah)y_n = (1 - ah)^{n+1}y_0.$$

Tenemos dos casos:

1. Si $h < 2/a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ y por ende $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)| = 0$.
2. Si $h \geq 2/a$, la sucesión diverge y no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)|$.

Por lo tanto el método es condicionalmente estable.



Método de Euler progresivo con distintos valores de h .

□

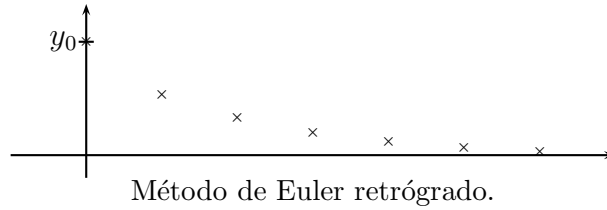
EJEMPLO 2.24. Si aplicamos el método de Euler retrógrado para el problema de Ejemplo 2.23 obtenemos

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h(-ay_{n+1}).$$

Despejando vemos que

$$y_{n+1} = \frac{1}{1+ah}y_n = \frac{1}{(1+ah)^{n+1}}y_0.$$

Como $1+ah > 1$ para todo $h > 0$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ y por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)| = 0$ sin importar el valor de h . Esto nos dice que el método es incondicionalmente estable. □



La estabilidad condicional es frecuente entre los métodos explícitos y la incondicional, entre los implícitos.

EJEMPLO 2.25. Estudiemos ahora la ecuación

$$\begin{cases} y'(x) = ay(x) & \text{para } x \in (0, \infty), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

con $a > 0$ e $y_0 > 0$. Se trata de una ecuación lineal de primer orden cuya solución es $y(x) = y_0 e^{ax}$. Esta vez no es cierto que $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ para ningún valor de a .

El método de Euler progresivo nos da $y_n = (1+h)^n y_0$, mientras que el método de Euler retrógrado nos da $y_n = (1-h)^{-n} y_0$. En ningún caso existe $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y(x_n)|$. Esto se ve fácilmente pues ambos límites son de la forma $\lim_{n \rightarrow \infty} |b^n - c^n|$ con $b \neq c$. Por lo tanto, ambos métodos son inestables. □

Capítulo 3

EDO lineales de orden superior

En este capítulo estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales de orden n , con $n \in \mathbb{N}$. Comenzaremos por dar las definiciones necesarias para formular el problema de Cauchy y enunciar el Teorema de Existencia y Unicidad, que será demostrado más adelante. Con el fin de presentar de una manera más clara la estrategia de resolución de estas ecuaciones comenzaremos por hacer un estudio detallado del caso de orden 2. Esto nos permitirá mostrar las técnicas en un contexto más abordable. En seguida veremos cómo resolver la ecuación de orden arbitrario a coeficientes constantes y daremos ideas de lo que puede hacerse cuando los coeficientes son variables, caso mucho más complejo.

1. La EDO lineal de orden n

Daremos una breve introducción a los operadores diferenciales lineales y plantearemos el problema que nos interesa resolver en este capítulo.

1.1. Operadores diferenciales lineales. Así como una función transforma números en números: $f(x) = y$, un operador transforma funciones en funciones: $P(f) = g$. Por ejemplo, la derivada o la integral son operadores que transforman una función en su derivada o primitiva, respectivamente. Más adelante estudiaremos la transformada de Laplace, que también es un operador. Los operadores que involucran solamente derivadas de una función se denominan operadores diferenciales (en oposición a los operadores integrales, que involucran primitivas).

Nos interesan operadores que actúan de una manera muy especial sobre cierto tipo particular de funciones.

Sea I un intervalo. Recordemos que $\mathcal{C}^n(I)$ denota el conjunto de funciones $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ continuas en I . Las funciones que pertenecen a $\mathcal{C}^n(I)$ se dice que son n **veces continuamente diferenciables** o **de clase $\mathcal{C}^n$** .

Estos conjuntos son subespacios vectoriales del espacio de funciones de $I \rightarrow \mathbb{R}$ con la suma y ponderación por escalar habituales. En efecto,

$0 \in \mathcal{C}^n(I)$ y si $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ entonces para todo real λ se cumple que $\lambda f + g \in \mathcal{C}^n$.

Un operador diferencial es **lineal** si

$$P(\lambda f + g) = \lambda P f + P g.$$

Denotemos por

$$D^k = \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{k \text{ veces}} = \frac{d^k}{dx^k}$$

el operador **derivada de orden** k , entendiendo que la **derivada de orden** 0 es el operador identidad I (que solemos omitir). Un operador de la forma

$$\begin{aligned} P(x, D) &= \sum_{k=0}^n a_k(x) D^k \\ &= a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \cdots + a_1(x) D + a_0(x), \end{aligned}$$

donde $a_k(x)$ son funciones de x , se llama **operador diferencial lineal de orden** n . Más precisamente, si f es una función suficientemente regular, entonces $P(x, D)f$ es la *función* cuyo valor en el punto x es

$$P(x, D)f(x) = a_n(x) f^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x) f'(x) + a_0(x) f(x).$$

Si $a_n = 1$ el operador está **normalizado** y si los coeficientes a_k son todos constantes se dice que el operador diferencial lineal es **a coeficientes constantes**. En este caso se suele escribir

$$P(D) = \sum_{k=0}^n a_k D^k = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0.$$

La suma y ponderación por escalar de operadores se define de la misma manera que para funciones. Con estas operaciones los operadores forman un espacio vectorial:

$$(P_1 + P_2)(f) = P_1(f) + P_2(f), \quad (\alpha P_1)(f) = \alpha P_1(f).$$

El producto de operadores diferenciales se define simplemente como su composición:

$$P_1 P_2 = P_1 \circ P_2.$$

Más precisamente, $[P_1 P_2](f) = P_1[P_2(f)]$ para cada f . Notemos que si P_1 es de orden n_1 y P_2 es de orden n_2 entonces $P_1 P_2$ es de orden $n_1 + n_2$.

Con este producto y la suma ya definida, se forma de hecho una estructura algebraica de *anillo* donde la unidad es el operador identidad

I. En particular, se tiene la distributividad por la derecha y por la izquierda, que es una propiedad heredada de la composición de funciones. Esto es

$$(P_1 + P_2)Q = P_1 Q + P_2 Q, \quad Q(P_1 + P_2) = Q P_1 + Q P_2.$$

El producto, como la composición, no es en general conmutativo. Sin embargo, en el caso de operadores lineales a *coeficientes constantes*, el anillo es *conmutativo*. Es decir, el producto sí conmuta:

$$P_1(D)P_2(D) = P_2(D)P_1(D).$$

La verificación de estas propiedades se deja como ejercicio al lector.

Usando la notación anterior de operadores diferenciales lineales, la siguiente tabla resume el contenido de este capítulo.

EDO lineal orden n	homogénea subespacio $\mathcal{H}$ de soluciones homogéneas	no homogénea hiperplano $\mathcal{S}$ de soluciones particulares
coefi- cientes constantes	$P(D)y = 0$ Polinomio característico Valores característicos	$P(D)y = \overline{Q}$ Coeficientes indeterminados Variación de parámetros
coefi- cientes variables	$P(x, D)y = 0$ Fórmula de Abel Fórmula de Liouville	$P(x, D)y = \overline{Q}$ Representación de Green Variación de parámetros

CUADRO 1. Tabla resumen de los temas tratados en este capítulo.

1.2. EDO lineal de orden n y problema de Cauchy. Una EDO lineal de orden n es una relación de la forma

$$P(x, D)y = \overline{Q},$$

donde

$$P(x, D) = \sum_{k=0}^n \overline{a}_k(x) D^k$$

es un operador diferencial lineal de orden n . La ecuación es **a coeficientes constantes** si los coeficientes de P son constantes:

$$P(x, D) = P(D) = \sum_{k=0}^n \overline{a}_k D^k.$$

En este caso el **polinomio característico** es

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \lambda^k$$

y sus raíces se llaman **valores característicos** de la EDO. Se dice que y es **solución** o que **define una curva integral** de la ecuación

$$P(x, D)y = \sum_{k=0}^n a_k(x) D^k y = \bar{Q}$$

en el intervalo I si $y \in \mathcal{C}^n(I)$ y

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = \bar{Q}(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

Dado $x_0 \in I$, una **condición inicial** para la ecuación diferencial lineal de orden n es una igualdad vectorial de la forma

$$\left(y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) \right) = \left(y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)} \right)$$

con el lado derecho dado en $\mathbb{R}^n$. En este contexto, el **problema de Cauchy** consiste en encontrar $y \in \mathcal{C}^n(I)$ tal que

$$(24) \quad \begin{cases} y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x) & \forall x \in I \\ \left(y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) \right) = \left(y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)} \right). \end{cases}$$

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 5.2. En efecto, más adelante en el Capítulo 5 veremos cómo una EDO lineal de orden n puede interpretarse como un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden. Una consecuencia es que el Teorema de Existencia y Unicidad para la ecuación de orden n , Teorema 3.1, se obtendrá como corolario del Teorema 5.2, que demostraremos en el Capítulo 5.

TEOREMA 3.1 (Existencia y Unicidad). *Supongamos que las funciones $\bar{a}_i(x)$, $\bar{Q}(x)$ son continuas en un intervalo I . Entonces para cada $x_0 \in I$ y para cada vector de condiciones iniciales, el problema de Cauchy (24) tiene una única solución.*

OBSERVACIÓN. Notemos que si $\bar{Q}(x) = 0$ y $y_0^{(k)} = 0$ para cada $k = 0, \dots, n-1$, entonces $y \equiv 0$.

2. Estudio completo de la ecuación de orden dos

Consideremos una EDO lineal de segundo orden (normalizada) a coeficientes constantes

$$(25) \quad y'' + \bar{a}_1 y' + \bar{a}_0 y = \bar{Q}$$

con $\bar{a}_0, \bar{a}_1$ en $\mathbb{R}$. En notación de operadores esto es

$$P(D)y = D^2y + \bar{a}_1 Dy + \bar{a}_0 y = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = \bar{Q},$$

donde λ_1 y λ_2 son las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \bar{a}_1 \lambda + \bar{a}_0.$$

Introduciendo la variable auxiliar $z = (D - \lambda_2)y$ se obtiene el siguiente sistema de dos EDO lineales de primer orden que sabemos resolver:

$$\begin{cases} (D - \lambda_1)z &= \bar{Q} \\ (D - \lambda_2)y &= z. \end{cases}$$

De la primera ecuación encontramos z , que sustituimos en la segunda ecuación para obtener y . Más precisamente, los resultados de la Sección 1 nos dan

$$\begin{aligned} z &= C_1 e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x} \int e^{-\lambda_1 x} \bar{Q}(x) dx \\ y &= C_2 e^{\lambda_2 x} + e^{\lambda_2 x} \int e^{-\lambda_2 x} z(x) dx, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} y(x) &= \underbrace{C_2 e^{\lambda_2 x} + C_1 e^{\lambda_2 x} \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx}_{\text{Solución Homogénea } y_h(x)} \\ &\quad + \underbrace{e^{\lambda_2 x} \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \left(\int e^{-\lambda_1 t} \bar{Q}(t) dt \right) dx}_{\text{Solución Particular } y_p(x)}. \end{aligned}$$

2.1. Solución Homogénea. Se tienen tres casos para los valores característicos:

1. Si λ_1 y λ_2 son reales y distintos vemos inmediatamente que la solución queda de la forma $y_h(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$.

2. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ entonces $y_h(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$.

3. Finalmente, si λ_1 y λ_2 son complejos conjugados de la forma $\sigma \pm iw$ con $w \neq 0$ tendremos que $y_h(x) = e^{\sigma x} (Ae^{iwx} + Be^{-iwx})$. Estas soluciones nos dan valores complejos, lo cual es un inconveniente. Para resolver este problema recordemos que $e^{iwx} = \cos(wx) + i \sin(wx)$, de

donde

$$\frac{e^{iwx} + e^{-iwx}}{2} = \cos(wx) \quad \text{y} \quad \frac{e^{iwx} - e^{-iwx}}{2i} = \operatorname{sen}(wx).$$

Así podemos escribir $y_h(x) = e^{\sigma x} (C \cos(wx) + D \operatorname{sen}(wx))$, con $C = (A + B)/i$ y $D = (A - B)$.

Resumimos lo anterior en el siguiente resultado:

TEOREMA 3.2. *La solución homogénea y_h de la EDO (25) a coeficientes constantes con valores característicos λ_1, λ_2 está dada por:*

1. $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. $y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $y_h = C_1 e^{\sigma x} \operatorname{sen} wx + C_2 e^{\sigma x} \cos wx$ si $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw$, con $w \neq 0$.

EJEMPLO 3.1 (Analogía electromecánica). En la figura 1, observamos a la izquierda un sistema mecánico en el cual m es la masa del objeto, k es la constante de elasticidad del resorte y b es la constante de amortiguamiento. La fuerza total del sistema, en función del tiempo se representa por $F(t)$. El sistema de la derecha representa un circuito eléctrico RCL , donde L es la inductancia de la bobina, C es la capacidad del condensador y R es la resistencia. $E(t)$ representa el voltaje aplicado en función del tiempo. La corriente que circula se representa por $\frac{dq}{dt}$.

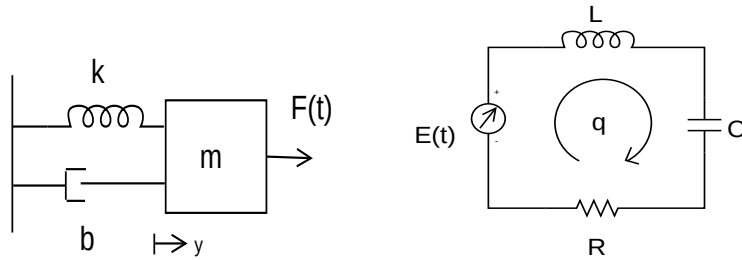


FIGURA 1. Analogía electromecánica.

Las ecuaciones que describen estos sistemas son

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F(t)}{m} \quad \text{y} \quad q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{CL}q = \frac{E(t)}{L},$$

respectivamente. En ambos casos se trata de una EDO lineal de orden 2 a coeficientes constantes. Si identificamos $m \sim L$, $b \sim R$ y $k \sim \frac{1}{C}$

(todas constantes positivas), entonces son análogos. El polinomio característico es $\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m}$ y sus raíces son $\lambda = \frac{-b}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$, donde $\Delta = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}$. Escribamos por comodidad $B = b/2m$ y supongamos que al sistema no se le aplica fuerza o voltaje; es decir, $F(t) = 0$ o $E(t) = 0$, según el caso. Hay 3 situaciones posibles:

1. Si $\Delta > 0$ entonces $b > 2\sqrt{km}$ (la constante de amortiguamiento b es grande), por lo que decimos que el sistema está en **régimen sobre-amortiguado**. Las raíces son reales, negativas y distintas. La solución es

$$y_h = C_1 e^{-(B-\sqrt{\Delta})t} + C_2 e^{-(B+\sqrt{\Delta})t}.$$

2. Si $\Delta = 0$ las raíces son reales e iguales. Decimos que el sistema está **críticamente amortiguado** ($b = 2\sqrt{km}$). En este caso la solución es

$$y_h = C_1 e^{-Bt} + C_2 t e^{-Bt}.$$

3. Finalmente, si $\Delta < 0$ las raíces son complejos conjugados. Decimos que el sistema está **subamortiguado** ($b < 2\sqrt{km}$) y la solución es

$$y_h = C_1 e^{-Bt} \sin(\sqrt{-\Delta} t) + C_2 e^{-Bt} \cos(\sqrt{-\Delta} t).$$

De manera equivalente podemos escribir $y_h = C_3 e^{-Bt} \sin(\sqrt{-\Delta} t + C_4)$, pues $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

□

2.2. Condiciones de borde. Hemos visto que una ecuación lineal de segundo orden tiene una única solución si especificamos el valor de la función y su derivada en un punto. Otro problema interesante es determinar si existe alguna solución que parta de un punto y llegue a otro predefinido. Este tipo de problema aparece con frecuencia en física, ingeniería y economía. Consideremos, por ejemplo, un problema del tipo

$$\begin{cases} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0. \end{cases}$$

Deseamos saber para cuáles valores de λ este problema tiene soluciones y cuántas. De acuerdo con el signo de λ podemos distinguir 3 casos:

1. $\lambda = 0$. Si $y'' = 0$ entonces $y(x) = Ax + B$. Reemplazando en $x = 0$ vemos que $B = 0$ y reemplazando en $x = 1$ vemos que $A = 0$. La

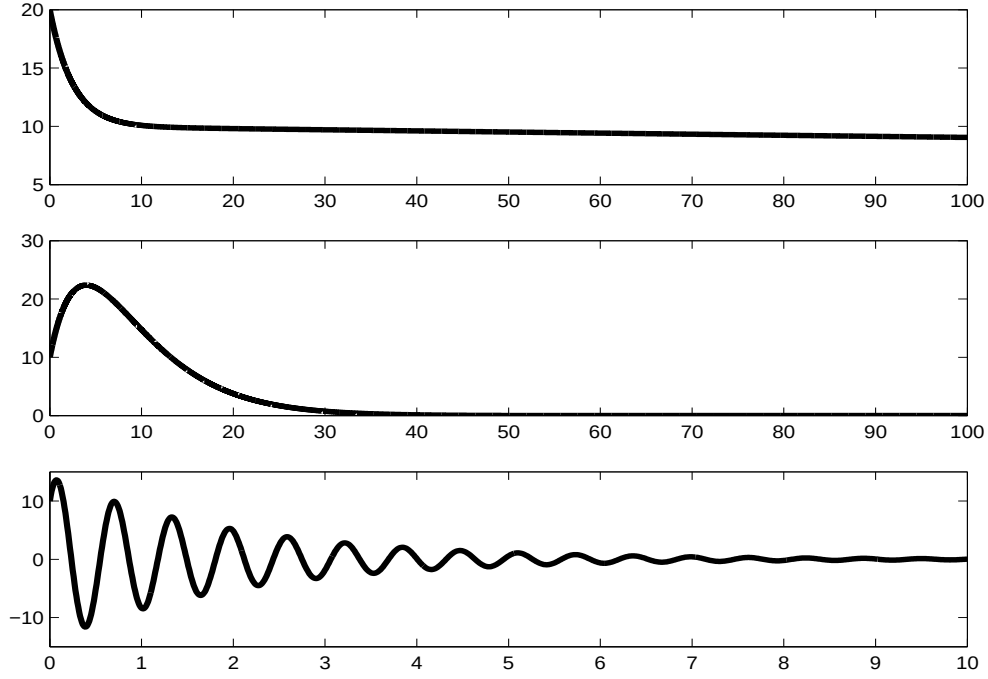


FIGURA 2. Regímenes sobreamortiguado (arriba), críticamente amortiguado (centro) y subamortiguado (abajo), con $C_1 = C_2 = 10$.

función nula es la única solución del problema.

2. $\lambda = -w^2 < 0$. Las soluciones son de la forma

$$y(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx}.$$

Las condiciones en 0 y 1 nos dan el sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^w + Be^{-w} = 0 \end{cases}$$

para A y B . Como $w \neq 0$, la única solución es $A = B = 0$. De nuevo, sólo obtenemos la solución nula.

3. $\lambda = w^2 > 0$. En este caso las soluciones están dadas por

$$y(x) = A \operatorname{sen}(wx) + B \cos(wx).$$

Esta vez las condiciones en 0 y 1 nos dan el sistema

$$\begin{cases} B = 0 \\ A \operatorname{sen}(w) = 0 \end{cases}$$

para A y B . Si

$$w = k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

entonces toda función de la forma $y(x) = A \operatorname{sen}(wx)$ es solución del problema.

2.3. Solución Particular. Al inicio de la sección mostramos una solución particular y_p . Dicha solución depende fuertemente de la estructura exponencial de las soluciones de la ecuación homogénea y por lo tanto la expresión es válida únicamente cuando los coeficientes son constantes. Presentaremos ahora un caso especial del **método de variación de parámetros**, que permite obtener una solución particular cuando se conocen dos soluciones homogéneas exigiendo únicamente que sean “suficientemente distintas”, lo que en orden dos quiere decir simplemente que no sean una múltiplo de la otra (ver Ejemplo 3.2).

Sean y_1 e y_2 dos soluciones de la ecuación homogénea tal que una no es múltiplo de la otra. Buscamos una solución particular de la forma $y_p(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$, donde las funciones $\gamma_1(x)$ y $\gamma_2(x)$ son incógnitas. En lo que sigue reemplazamos y_p en (25) y ordenamos los términos convenientemente, omitiendo la dependencia de x para mayor claridad. Obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= y_p'' + \overline{a}_1 y_p' + \overline{a}_0 y_p \\ &= (\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2)'' + \overline{a}_1 (\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2)' + \overline{a}_0 (\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2) \\ &= (\gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2) + \gamma_1 y_1'' + \gamma_2 y_2'' + \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' \\ &\quad + \overline{a}_1 (\gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 + \gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2') + \overline{a}_0 (\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2) \\ &= (\gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2) + \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' + \overline{a}_1 (\gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2) \end{aligned}$$

pues $\gamma_1(y_1'' + \overline{a}_1 y_1' + \overline{a}_0 y_1) = \gamma_2(y_2'' + \overline{a}_1 y_2' + \overline{a}_0 y_2) = 0$.

Nótese que si imponemos $\gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 = 0$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 &= 0 \\ \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' &= \overline{Q}, \end{cases}$$

que se escribe de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(x) \\ \gamma_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{Q}(x) \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz de la izquierda:

$$W(x) = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

se denomina **Wronskiano** de la EDO. Si es distinto de cero para todo x ,¹ la matriz es invertible y obtenemos la solución buscada. Primero vemos que

$$\begin{aligned}\gamma'_1 &= \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \overline{Q} & y'_2 \end{vmatrix} = \frac{-\overline{Q}y_2}{W(y_1, y_2)} \\ \gamma'_2 &= \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & \overline{Q} \end{vmatrix} = \frac{\overline{Q}y_1}{W(y_1, y_2)}.\end{aligned}$$

Luego integramos ambas expresiones para obtener los valores de $\gamma_1(x)$ y $\gamma_2(x)$:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= - \int \frac{\overline{Q}y_2}{W(y_1, y_2)} dx + K_1 \\ \gamma_2 &= \int \frac{\overline{Q}y_1}{W(y_1, y_2)} dx + K_2\end{aligned}$$

Así, una solución particular y_p es

$$(26) \quad y_p = -y_1 \int \frac{\overline{Q}y_2}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{\overline{Q}y_1}{W(y_1, y_2)} dx.$$

Se propone al lector como ejercicio comprobar que en los tres casos mencionados en el Teorema 3.2 el Wronskiano es distinto de cero en todo $\mathbb{R}$.

2.4. El fenómeno de resonancia. Retomaremos el Ejemplo 3.1 de la analogía electromecánica para explicar un fenómeno muy interesante, llamado **resonancia**, que ocurre en la ecuación lineal de segundo orden. Mencionaremos primero un par de ejemplos de este fenómeno.

Para afinar algunos instrumentos musicales, en especial los de cuerda, se puede utilizar un instrumento llamado **diapasón**. Cada diapasón tiene una **frecuencia propia** o **fundamental**. El procedimiento es el siguiente: se percute la cuerda y se coloca cerca del diapasón. Si la frecuencia de vibración de la cuerda es suficientemente cercana a la frecuencia propia del diapasón, éste comenzará a vibrar. Se sabe entonces que la cuerda produce el sonido correcto. En palabras, esto se explica más o menos así: la vibración de la cuerda es transmitida al diapasón a través del aire. Si la frecuencia de las vibraciones es muy cercana a la frecuencia propia del diapasón, entonces la amplitud del

¹Más adelante veremos cuándo esto ocurre. En la EDO lineal de segundo orden tiene que ver con que las soluciones escogidas no sean una múltiplo de la otra.

movimiento de éste último se potencia considerablemente. En breve veremos una justificación precisa de este hecho. El mismo fenómeno es el que hace posible que algunas voces humanas sean capaces de romper piezas finas de cristal.

Recordemos que la ecuación es

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F(t)}{m}.$$

Para simplificar los cálculos supondremos que no hay amortiguamiento. Es decir, $b = 0$. En este caso, dos soluciones linealmente independientes son

$$\text{sen}(\beta t) \quad \text{y} \quad \cos(\beta t), \quad \text{donde} \quad \beta = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Supongamos que se tiene la ecuación

$$y'' + \frac{k}{m}y = A \cos(\omega t),$$

donde $\omega \neq \beta$ es la frecuencia y A es la amplitud del estímulo **forzante**. Para encontrar la solución particular usaremos la fórmula (26) (más adelante estudiaremos un método más eficiente para este tipo de lado derecho). El Wronskiano es

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \\ \beta \cos(\beta t) & -\beta \text{sen}(\beta t) \end{vmatrix} = -\beta.$$

La fórmula (26) nos dice que

$$y_p = \frac{A}{\beta} \left[\text{sen}(\beta t) \int \cos(\omega s) \cos(\beta s) ds + \cos(\beta t) \int \cos(\omega s) \text{sen}(\beta s) ds \right].$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} \cos(\theta) \cos(\phi) &= \frac{1}{2} [\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)] \\ \text{sen}(\theta) \cos(\phi) &= \frac{1}{2} [\text{sen}(\theta + \phi) + \text{sen}(\theta - \phi)]. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{A \operatorname{sen}(\beta t)}{2\beta} \int [\cos((\beta + \omega)s) + \cos((\beta - \omega)s)] ds \\
 &\quad + \frac{A \cos(\beta t)}{2\beta} \int [\operatorname{sen}((\beta + \omega)s) + \operatorname{sen}((\beta - \omega)s)] ds \\
 &= \frac{A}{2\beta} \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta t) \operatorname{sen}((\beta + \omega)t)}{\beta + \omega} + \frac{\operatorname{sen}(\beta t) \operatorname{sen}((\beta - \omega)t)}{\beta - \omega} \right] \\
 &\quad + \frac{A}{2\beta} \left[\frac{\cos(\beta t) \cos((\beta + \omega)t)}{\beta + \omega} + \frac{\cos(\beta t) \cos((\beta - \omega)t)}{\beta - \omega} \right].
 \end{aligned}$$

Agrupando el primer término con el tercero y el segundo con el cuarto, podemos usar las fórmulas para la suma de ángulos y obtener

$$y_p = \frac{A}{2\beta} \left[\frac{\cos(\omega t)}{\beta + \omega} + \frac{\cos(\omega t)}{\beta - \omega} \right] = \frac{A}{\beta^2 - \omega^2} \cos(\omega t).$$

Vemos que la amplitud del movimiento es $\frac{A}{\beta^2 - \omega^2}$. Mientras más pequeña sea la diferencia entre β y ω más grande será la amplitud.

EJERCICIO PROPUESTO 3.1. Realice los cálculos con $b \neq 0$ y observe que ocurre un fenómeno similar, pero obtenemos esta vez la amplitud $\frac{A}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$. La resonancia se produce para un valor de ω cercano a la frecuencia fundamental β si b es suficientemente pequeño.

3. Más sobre la estructura de la solución

Las funciones $y_1, \dots, y_k$ en $\mathcal{C}^n(I)$ son **linealmente independientes** (l.i.) si la afirmación

$$(27) \quad C_1 y_1(x) + \dots + C_k y_k(x) \equiv 0 \text{ para todo } x \in I$$

implica necesariamente que todos los coeficientes $C_1, \dots, C_k$ son cero. Si por el contrario existen $C_1, \dots, C_k$ tales que al menos uno es distinto de cero y se tiene (27), decimos que las funciones $y_1, \dots, y_k$ son **linealmente dependientes** (l.d.).

EJEMPLO 3.2. Dos funciones y_1 e y_2 son linealmente dependientes si, y sólo si, una es múltiplo de la otra. Más adelante veremos cómo el Wronskiano puede ayudarnos a comprobar si k funciones ($k \geq 2$) son linealmente independientes. $\square$

3.1. Los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{S}$. Vamos a estudiar la estructura de la solución general de una ecuación diferencial lineal de orden n . En primer lugar, denotemos por $\mathcal{H}$ el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea:

$$\mathcal{H} = \{y \in \mathcal{C}^n(I) \mid y^{(n)}(x) + \cdots + \bar{a}_1(x)y'(x) + \bar{a}_0(x)y(x) = 0 \ \forall x \in I\}.$$

TEOREMA 3.3. $\mathcal{H}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{C}^n(I)$ de dimensión n .

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que $\mathcal{H}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{C}^n(I)$ y lo dejamos como ejercicio para el lector. Para demostrar que su dimensión es n vamos a construir una base de $\mathcal{H}$ con n elementos. Más precisamente encontraremos n funciones l.i. $y_1, \dots, y_n$ tales que cualquier elemento de $\mathcal{H}$ puede escribirse como combinación lineal de ellas. Seleccionemos $x_0 \in I$. De acuerdo con el Teorema de Existencia y Unicidad, para cada $i = 1, \dots, n$ podemos encontrar una función $y_i \in \mathcal{C}^n$ tal que $y_i^{(n)}(x) + \cdots + \bar{a}_1(x)y_i'(x) + \bar{a}_0(x)y_i(x) = 0$ para todo $x \in I$ y además satisface la condición inicial

$$\begin{aligned} y_i(x_0) &= 0 \\ y_i'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ y_i^{(i-1)}(x_0) &= 1 \\ &\vdots \\ y_i^{(n-1)}(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Construimos así n funciones $y_1, \dots, y_n$. Probaremos ahora que son linealmente independientes. Supongamos que $\alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0$ para todo $x \in I$. Derivando, tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) &= 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) + \cdots + \alpha_n y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Evaluando en $x = x_0$ vemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ (en cada línea queda sólo un sumando), con lo que las funciones $y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes.

Ahora probaremos que todo elemento $y_h \in \mathcal{H}$ puede escribirse como combinación lineal de $y_1, \dots, y_n$. Queremos encontrar constantes $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tales que para todo $x \in I$,

$$(28) \quad y_h(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \cdots + \beta_n y_n(x).$$

Derivando esa expresión $(n-1)$ veces se obtiene

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_h(x) \\ y_h'(x) \\ \vdots \\ y_h^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

para todo $x \in I$. Evaluando en $x = x_0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_h(x_0) \\ y_h'(x_0) \\ \vdots \\ y_h^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Hemos probado que (28) es cierta cuando $x = x_0$ si $\beta_i = y_h^{(i-1)}(x_0)$ para $i = 1, \dots, n$. Resta demostrar ahora que, en efecto, la igualdad en (28) se tiene para todo $x \in I$ y no sólo en x_0 . Para ello, definamos la función

$$z_h = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_n y_n.$$

Debemos probar que $y_h(x) = z_h(x)$ para todo $x \in I$. Notemos primero que la función $y_h - z_h$ es solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + \bar{a}_0(x)y = 0 & \forall x \in I \\ (y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) = (0, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

y por el Teorema de Existencia y Unicidad, Teorema 3.1 (ver la observación que le sigue), $y_h - z_h$ es la función nula. $\square$

Denotamos por $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial lineal de orden n no homogénea

$$\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{C}^n(I) \mid y^{(n)} + \cdots + \bar{a}_1(x)y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q} \text{ en } I\}.$$

Sean X un espacio vectorial, A un subespacio de X y $x \in X$. Un **hiperplano** o **subespacio afín** es un conjunto de la forma

$$x + A = \{z \in X \mid z = x + a \text{ para algún } a \in A\}.$$

TEOREMA 3.4. *Si $y_p \in \mathcal{S}$ es cualquier solución de la ecuación no homogénea, entonces $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{H}$.*

Geométricamente, esto quiere decir que $\mathcal{S}$ es un hiperplano que se obtiene al desplazar por y_0 el subespacio $\mathcal{H}$.

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que la resta de dos funciones en $\mathcal{S}$ está en $\mathcal{H}$; es decir, es solución de la ecuación homogénea. Pero esto es inmediato de la linealidad de la ecuación. $\square$

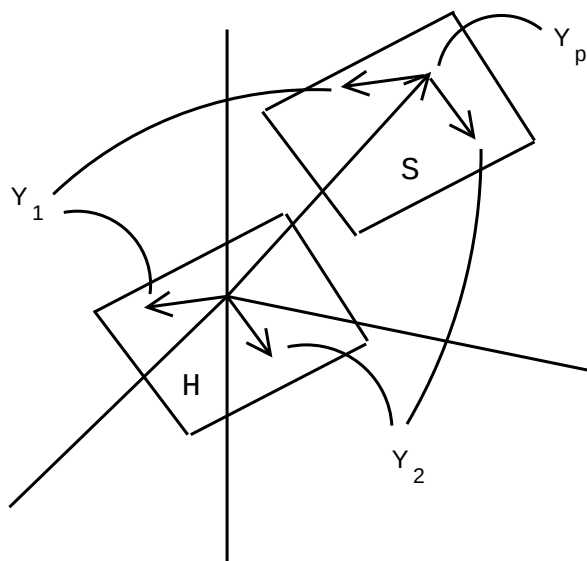


FIGURA 3. Representación de los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{S}$ en 2 dimensiones sobre $\mathcal{C}^2(I)$.

COROLARIO 3.1. *Todo elemento de $\mathcal{S}$ se escribe de la forma*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_p,$$

donde $y_1, \dots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, y_p es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea y las $C_i \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias que dependen del vector de condiciones iniciales.²

3.2. Wronskiano y Fórmula de Abel. El Wronskiano asociado a n funciones $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$ es

$$W(x) = W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Notar que W es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en I . Usamos también la notación $W(y_1, \dots, y_n)$ para enfatizar la dependencia de las funciones $y_1, \dots, y_n$.

Enunciaremos ahora dos resultados técnicos sobre determinantes que necesitaremos en las demostraciones que siguen:

²Las C_i no son los β_i calculados en la demostración del Teorema 3.3.

LEMA 3.1. *El determinante es multilineal por filas y columnas.*

Por ejemplo, si $\det(A) = \det(F_1, F_2, \dots, F_n)$, donde F_i es la i -ésima fila de A , se tendrá que

$$\begin{aligned} \det(F_1, \dots, a + \lambda b, \dots, F_n) &= \det(F_1, \dots, a, \dots, F_n) \\ &\quad + \lambda \det(F_1, \dots, b, \dots, F_n). \end{aligned}$$

LEMA 3.2. *Sea $A(x)$ una matriz con entradas variables (dependientes de x). Como arriba escribimos $\det(A) = \det(F_1, F_2, \dots, F_n) = \det(C_1, C_2, \dots, C_n)$, donde las F_i y las C_j son las filas y columnas de A , respectivamente. Tenemos que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} |A(x)| &= \sum_{i=1}^n \det(F_1, \dots, F'_i, \dots, F_n) \\ &= \sum_{j=1}^n \det(C_1, \dots, C'_j, \dots, C_n). \end{aligned}$$

Con esto, la técnica para derivar el determinante de una matriz es la siguiente:

1. Se deriva la primera fila (o columna) y se calcula el determinante de la matriz así obtenida.
2. Se hace lo mismo con cada una de las filas (o columnas) de la matriz.
3. Se suman los resultados parciales.

La demostración del Lema 3.2 puede hacerse fácilmente por inducción o utilizando la definición de derivada y el Lema 3.1.

Recordemos que si dos filas en una matriz son iguales, su determinante es cero.

Cuando calculamos la derivada del Wronskiano usando el método descrito arriba (por filas) nos encontramos con que la mayoría de los sumandos, salvo el último, tienen una fila repetida y por lo tanto son cero. Así obtenemos

$$W'(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & \dots & y'_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Como las funciones $y_1, \dots, y_n$ son soluciones de la ecuación homogénea, la última fila se reescribe para obtener

$$W'(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ -\sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i(x) y_1^{(i)} & \dots & -\sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i(x) y_n^{(i)} \end{vmatrix}.$$

Gracias al Lema 3.1, podemos expandir la última fila. Todos los sumandos, salvo el último, tienen una fila repetida, por lo que la derivada del Wronskiano queda de la forma

$$(29) \quad W'(x) = -\bar{a}_{n-1}(x)W(x).$$

Al integrar la ecuación (29) obtenemos la Fórmula de Abel:

TEOREMA 3.5 (Fórmula de Abel). *Sean $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{H}$. Entonces el Wronskiano W satisface*

$$W(x) = C \exp \left(- \int \bar{a}_{n-1}(x) dx \right)$$

con $C \in \mathbb{R}$. En particular, si se anula en un punto, se anula siempre.

Resumiremos algunas propiedades del Wronskiano que tienen que ver con independencia lineal de funciones en el siguiente resultado:

TEOREMA 3.6. *Sean $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$.*

1. *Si $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$ entonces $y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes.*
2. *En general, el que $W(x) = 0$ para todo $x \in I$ no basta para garantizar que $y_1, \dots, y_n$ sean linealmente dependientes.*
3. *Si $y_1, \dots, y_n$ son funciones en $\mathcal{H}$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*
 - a) $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$;
 - b) $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$; y
 - c) $y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes.

DEMOSTRACIÓN. La parte 1 se deja como ejercicio al lector. Un contraejemplo para la parte 2 es $y_1 = x^3$ e $y_2 = |x^3|$, para $n = 2$.

En cuanto a la parte 3, la equivalencia entre a) y b) es evidente gracias a la fórmula de Abel y la implicancia b) $\Rightarrow$ c) es clara gracias a la parte 1. Para la otra implicancia, probemos que si $W(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in I$, entonces $y_1, \dots, y_n$ son linealmente dependientes. En

efecto, si $W(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in I$, se tiene que existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

pues la matriz del lado izquierdo no es invertible. Definiendo $z(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} z(x_0) &= \alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) &= 0 \\ z'(x_0) &= \alpha_1 y_1'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(x_0) &= \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Como $z \in \mathcal{H}$, por el Teorema de Existencia y Unicidad, se tiene que $z(x) = 0$ para todo $x \in I$. Luego existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ para todo $x \in I$. $\square$

Si $y_1, \dots, y_n$ son una base de $\mathcal{H}$; es decir, si son n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, la matriz

$$\Phi = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

se llama **matriz fundamental de soluciones** asociada a la base $y_1, \dots, y_n$. No se debe confundir la matriz fundamental con el Wronskiano, que es $W = \det \Phi$.

4. EDO lineal de orden n a coeficientes constantes

En esta sección estudiaremos varios métodos para resolver la ecuación diferencial lineal de orden n a coeficientes constantes. Para la ecuación homogénea describiremos un método que sigue la misma línea de lo que se hizo para la ecuación de orden 2, usando los valores característicos. Finalmente nos enfocaremos en la búsqueda de soluciones particulares de la ecuación homogénea.

4.1. Solución homogénea.

4.1.1. *Polinomio característico y factorización del operador diferencial lineal.* La EDO

$$y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + \bar{a}_0y = 0$$

se escribirá de la forma $P(D)y = 0$, donde $P(D)$ es el operador diferencial

$$P(D) = D^n + \bar{a}_{n-1}D^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1D + \bar{a}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i D^i$$

con $\bar{a}_n = 1$. El operador $P(D)$ está asociado al **polinomio característico**

$$p(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1\lambda + \bar{a}_0.$$

Como se trata de un polinomio de grado n , tendrá n raíces reales o complejas llamadas **valores característicos** (quizá repetidos). Supondremos que $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ son las l raíces distintas y tienen multiplicidades $m_1, \dots, m_l$, respectivamente. Recordemos que como los coeficientes del polinomio son reales, las raíces que sean complejas vendrán en pares conjugados. El polinomio se puede descomponer de la forma

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_l)^{m_l} = \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i)^{m_i},$$

donde $n = \sum_{i=1}^l m_i$. La factorización de $p(\lambda)$ induce una análoga en $P(D)$, donde el producto corresponde a una composición:

$$P(D) = \underbrace{(D - \lambda_1) \circ \cdots \circ (D - \lambda_1)}_{m_1 \text{ veces}} \cdots \underbrace{(D - \lambda_l) \circ \cdots \circ (D - \lambda_l)}_{m_l \text{ veces}}$$

Note que esta factorización permite de hecho resolver la EDO de orden n como una serie de EDO de orden 1, En efecto, es claro que

$$P(D)y = 0 \Leftrightarrow (D - \lambda_1)^{m_1} \circ \cdots \circ (D - \lambda_l)^{m_l}y = 0,$$

entonces si definimos nuevas variables z_i de la forma:

$$\underbrace{(D - \lambda_1) \circ (D - \lambda_1) \circ \cdots \circ (D - \lambda_l) \circ \underbrace{(D - \lambda_l)y}_{z_{n-1}}}_{z_{n-2}} = 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{z_1}$$

lo que genera un sistema en cascada de n EDO's lineales de orden 1:

$$\begin{aligned}(D - \lambda_1)z_1 &= 0 \\ (D - \lambda_1)z_2 &= z_1 \\ &\vdots \\ (D - \lambda_1)z_{m_1} &= z_{m_1-1} \\ &\vdots \\ (D - \lambda_l)y &= z_{n-1}\end{aligned}$$

En principio, este es un método válido para resolver la EDO (incluso la no-homogénea) pero veremos a continuación que la solución homogénea se puede obtener de una forma mucho más explícita.

4.1.2. La propiedad de traslación y la solución homogénea.

PROPIEDADES 3.1. (Traslación)

1. $P(D + \lambda)1 = p(\lambda)$
2. $P(D)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}P(D + \lambda) = e^{\lambda x}p(\lambda)$
3. $P(D)(f(x)e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}P(D + \lambda)f(x)$

DEMOSTRACIÓN. 1. Recordemos que

$$(D + \lambda)^k f(x) = \underbrace{(D + \lambda) \dots (D + \lambda)}_{k \text{ veces}} f(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)}(x) \lambda^{k-i},$$

luego, si $f(x) = 1$, para todo $i > 0$, $f^{(i)}(x) = 0$, con lo que se obtiene $(D + \lambda)^k 1 = \lambda^k$, por lo tanto $P(D + \lambda)1 = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i \lambda^i = p(\lambda)$.

2. De 1) y 3) con $f(x) = 1$ se tiene el resultado.

3. Se sabe que $D^j(f(x)e^{\lambda x}) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} D^k(f(x))D^{j-k}(e^{\lambda x}) =$

$$e^{\lambda x} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} D^k(f(x))\lambda^{j-k} = e^{\lambda x}(D + \lambda)^j f(x).$$

$$\text{Ahora, } P(D)(f(x)e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^n \bar{a}_j D^j(f(x)e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^n [\bar{a}_j e^{\lambda x}(D + \lambda)^j f(x)] = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^n \bar{a}_j (D + \lambda)^j f(x) = e^{\lambda x} P(D + \lambda)f(x).$$

□

Con ayuda de la propiedad 2) se pueden encontrar l soluciones de la ecuación homogénea. Si λ_i es una raíz del polinomio $p(\lambda)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}P(D)e^{\lambda_i x} &= e^{\lambda_i x} \underbrace{p(\lambda_i)}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_l x}$ son soluciones de (H). Veamos que son l.i.:

$$\begin{aligned}
 W(x, e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_l x}) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_l x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_l e^{\lambda_l x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_l^{l-1} e^{\lambda_l x} \end{vmatrix} \\
 &= \exp\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i x\right) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} & \dots & \lambda_l^{l-1} \end{vmatrix} \\
 &= \exp\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i x\right) C \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)
 \end{aligned}$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, el Wronskiano es distinto de cero y las funciones son l.i.

Para formar la base necesitamos n funciones l.i., por lo tanto hay que encontrar $n - l$ más. De la propiedad 3), se tiene que $(\lambda_i$ es una raíz del polinomio $p(\lambda)$):

$$\begin{aligned}
 P(D)(x^k e^{\lambda_i x}) &= e^{\lambda_i x} P(D + \lambda_i)x^k \\
 &= (D - \lambda_1 + \lambda_i)^{m_1} \dots (D - \lambda_i - \lambda_i)^{m_i} \dots (D - \lambda_l - \lambda_i)^{m_l} x^k \\
 &= (D - \lambda_1 + \lambda_i)^{m_1} \dots (D - \lambda_{i-1} - \lambda_i)^{m_{i-1}} (D - \lambda_{i+1} - \lambda_i)^{m_{i+1}} \\
 &\quad \dots (D - \lambda_l - \lambda_i)^{m_l} D^{m_i} x^k
 \end{aligned}$$

Como $D^{m_i} x^k = 0 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq m_i - 1$, se encuentran $m_i - 1$ soluciones de (H):

$$x e^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1} e^{\lambda_i x}$$

Repitiendo este procedimiento para cada m_i , se encuentran $n - l$ soluciones, ya que $\sum_{i=1}^l (m_i - 1) = \sum_{i=1}^l m_i - l = n - l$.

EJEMPLO 3.3.

$$(D - 1)^2 (D + 3)^5 D^3 y = 0$$

En este caso $n = 10$. Veamos todas las soluciones que se encuentran con este método:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 = 1, m_1 = 2 &\Rightarrow \{e^x, x e^x\} \\
 \lambda_2 = -3, m_2 = 5 &\Rightarrow \{e^{-3x}, x e^{-3x}, x^2 e^{-3x}, x^3 e^{-3x}, x^4 e^{-3x}\} \\
 \lambda_3 = 0, m_3 = 3 &\Rightarrow \{1, x, x^2\}
 \end{aligned}$$

Veamos si son l.i. Para todo $x \in I$ se debe cumplir:

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,1}e^x + \alpha_{1,2}xe^x + \\ & \alpha_{2,1}e^{-3x} + \alpha_{2,2}xe^{-3x} + \alpha_{3,1}x^2e^{-3x} + \alpha_{4,1}x^3e^{-3x} + \alpha_{5,1}x^4e^{-3x} + \\ & \alpha_{3,1} + \alpha_{3,2}x + \alpha_{3,3}x^2 = 0 \end{aligned}$$

Aplicando $(D-1)^3(D+3)^5D^2$ a esta expresión, se transforma en

$$2\alpha_{3,3} = 0$$

Aplicando $(D-1)^3(D+3)^5D$, se obtiene

$$\alpha_{3,2} = 0$$

Y sucesivamente, se obtiene que $\alpha_{i,j_i} = 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, por lo tanto, son l.i.

En general, las n soluciones encontradas son l.i., pues dada la ecuación

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,1}e^{\lambda_1 x} + \dots + \alpha_{1,m_1}x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} + \\ & \alpha_{2,1}e^{\lambda_2 x} + \dots + \alpha_{2,m_2}x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x} + \\ & \vdots \\ & \alpha_{l,1}e^{\lambda_l x} + \dots + \alpha_{l,m_l}x^{m_l-1}e^{\lambda_l x} = 0 \end{aligned}$$

Al aplicar el operador $(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_i)^{m_i-1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l}$, se obtiene

$$\begin{aligned} & \alpha_{i,m_i-1}(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l}(D - \lambda_i)^{m_i-1}(x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}) = 0 \\ & e^{\lambda_i x} \alpha_{i,m_i-1} \underbrace{(D - \lambda_1 + \lambda_i)^{m_1} \dots (D - \lambda_l + \lambda_i)^{m_l}}_{\tilde{p}(\lambda_i)} \underbrace{D^{m_i-1}x^{m_i-1}}_{(m_i-1)!} = 0 \\ & e^{\lambda_i x} \alpha_{i,m_i-1} (m_i - 1)! \tilde{p}(\lambda_i) = 0 \end{aligned}$$

Se verifica que $\tilde{p}(\lambda_i) \neq 0$ y $(m_i - 1)! \neq 0$, por lo tanto $\alpha_{i,m_i-1} = 0$. Repitiendo la aplicación progresivamente, se verifica que todos los α_{i,m_i-1} son iguales a cero, con lo cual las n funciones son l.i..

Antes de pasar a los ejemplos resumiremos la discusión anterior en el siguiente resultado:

TEOREMA 3.7. *Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ son los valores característicos, con multiplicidades $m_1, \dots, m_l$, de la ecuación homogénea*

$$(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l} y = 0.$$

Una base para $\mathcal{H}$ es la generada por las siguientes funciones linealmente independientes:

- Para cada valor característico λ real

$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{m-1}e^{\lambda x}.$$

- Para cada par de valores característicos complejos $\alpha \pm i\beta$,

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad xe^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad \dots \quad x^{m-1}e^{\alpha x} \cos(\beta x),$$

$$e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad xe^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad \dots \quad x^{m-1}e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

EJEMPLO 3.4.

$$(D-1)^2(D+3)^5D^3y = 0.$$

En este caso $n = 10$. Veamos todas las soluciones que se encuentran con este método:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, \quad m_1 = 2 &\Rightarrow \{e^x, xe^x\}, \\ \lambda_2 = -3, \quad m_2 = 5 &\Rightarrow \{e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}, x^4e^{-3x}\}, \\ \lambda_3 = 0, \quad m_3 = 3 &\Rightarrow \{1, x, x^2\}. \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 3.5. Resolveremos ahora la ecuación diferencial

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$$

El polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)^2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - i)^2(\lambda + i)^2. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces las soluciones

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, \quad m_1 = 1 &\Rightarrow \{e^x\}, \\ \lambda_2, \overline{\lambda_2} = \pm i, \quad m_2 = 2 &\Rightarrow \{\cos(x), \sin(x), x \cos(x), x \sin(x)\}. \end{aligned}$$

Finalmente, toda solución homogénea se escribe como combinación lineal de estas funciones, por lo que la solución general es

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x) + C_4 x \cos(x) + C_5 x \sin(x).$$

□

4.2. Ecuación no homogénea. Estudiaremos dos métodos para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea:

- El método de **coeficientes indeterminados**, que puede usarse cuando el lado derecho involucra únicamente polinomios, senos, cosenos y exponenciales. Consiste en postular que la solución es de cierto tipo (similar al lado derecho), pero con coeficientes que son determinados *a posteriori*. Tiene la ventaja de que los cálculos son extremadamente sencillos ya que involucran únicamente derivación de polinomios, exponenciales y funciones trigonométricas.
- El método de **variación de parámetros** se basa en la representación de la ecuación de orden n como un sistema lineal de primer orden. De hecho, también es un método valioso para encontrar soluciones particulares de estos sistemas. Consiste en representar la solución particular como una combinación *variable* de las soluciones homogéneas. Tiene dos ventajas notables en cuanto a su rango de aplicaciones: en primer lugar, sirve para cualquier tipo de lado derecho; en segundo lugar, el método también es útil, al menos teóricamente, para el estudio de ecuaciones a coeficientes variables. También tiene dos puntos en contra: es necesario conocer una base del espacio de soluciones homogéneas y además involucra operaciones con matrices y cálculo de integrales.

4.2.1. Método de los coeficientes indeterminados. Este método puede aplicarse para encontrar una solución particular de la ecuación

$$P(D)y = q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x}$$

con $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ y $q_{k_0}e^{\lambda_0 x}$ una función que puede ser un polinomio por una exponencial, un polinomio por seno o coseno por una exponencial o cualquier combinación lineal de estos, donde $gr(q_{k_0}) \leq k_0$ en caso de ser un polinomio.

Este método tiene la desventaja aparente de ser muy restrictivo en cuanto al tipo de lado derecho para el cual es útil. Sin embargo, estas funciones son sumamente frecuentes en las aplicaciones.

El operador diferencial que anula el lado derecho es $(D - \lambda_0)^{k_0+1}$, pues

$$\begin{aligned} (D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)y &= (D - \lambda_0)^{k_0+1}q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \\ &= e^{\lambda_0 x}D^{k_0+1}q_{k_0}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, la ecuación se transforma una homogénea de orden $n + k_0 + 1$ que sabemos resolver.

Si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, se aplica además el operador $(D - \bar{\lambda}_0)^{k_0+1}$ a ambos lados de la ecuación, con lo que se obtiene $(D - \bar{\lambda}_0)^{k_0+1}(D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)y = 0$, que es una homogénea de orden $n + 2(k_0 + 1)$. Hay dos casos que se estudiarán:

A. Caso no resonante: $\lambda_0 \neq \lambda_j$ para todo $j \in \{1, \dots, l\}$

1. **A.1 Caso real:** $\lambda_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(D)y &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \Rightarrow y = y_h + y_p \\ (D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} &= 0 \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_h \end{aligned}$$

La idea es obtener y_p comparando $\tilde{y}_h$ e y_h , más precisamente, como combinación lineal de aquellas funciones que aparezcan en $\tilde{y}_h$ y que sean l.i. con las que aparezcan en y_h .

Se sabe que y_h es combinación lineal de funciones pertenecientes a

$$\begin{aligned} M &= \bigcup_{\lambda_i \in \mathbb{R}} \{e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}\} \cup \\ &\quad \bigcup_{\lambda_j = \sigma_j \pm iw_j} \{e^{\sigma_j x} \cos w_j x, \dots, x^{m_j-1}e^{\sigma_j x} \cos w_j x\} \cup \\ &\quad \{e^{\sigma_j x} \sin w_j x, \dots, x^{m_j-1}e^{\sigma_j x} \sin w_j x\} \end{aligned}$$

E $\tilde{y}_h$ es combinación lineal de elementos pertenecientes a

$$\tilde{M} = M \cup \{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k_0}e^{\lambda_0 x}\}$$

Luego, $y_p = (A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\lambda_0 x}$, con A_i constantes en $\mathbb{R}$ a determinar.

Reemplazando y_p en $P(D)y$:

$$\begin{aligned} P(D)(A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\lambda_0 x} &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \\ e^{\lambda_0 x}P(D + \lambda_0)(A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0}) &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \\ r_{k_0}(x) &= q_{k_0}(x), \end{aligned}$$

donde $r_{k_0}(x)$ es un polinomio cuyos coeficientes dependen de A_i para $i \in \{0, \dots, k_0\}$. Igualando coeficientes se obtiene un sistema lineal de $(k_0 + 1) \times (k_0 + 1)$, de donde se calculan los coeficientes.

EJEMPLO 3.6. Encontraremos una solución particular de la ecuación

$$(D - 1)(D - 2)y = xe^{3x}.$$

Tenemos que $\alpha = 3$, que no es un valor característico de la ecuación. Como el polinomio que acompaña a la exponencial en el lado derecho tiene grado 1, proponemos como solución

$$y_p(x) = (A_0 + A_1x)e^{3x}.$$

Aplicamos a y_p el operador diferencial $P(D) = (D-1)(D-2) = D^2 - 3D + 2$ y obtenemos

$$\begin{aligned} P(D)y_p(x) &= (6A_1 + 9A_0 + 9A_1x)e^{3x} \\ &\quad - 3(A_1 + 3A_0 + 3A_1x)e^{3x} \\ &\quad + 2(A_0 + A_1x)e^{3x} \\ &= (3A_1 + 2A_0 + 2A_1x)e^{3x}. \end{aligned}$$

Comparando con el lado derecho de la ecuación tenemos el sistema

$$\begin{cases} 0 &= 3A_1 + 2A_0 \\ 1 &= 2A_1, \end{cases}$$

cuya solución es $A_0 = -3/4$, $A_1 = 1/2$. De aquí, una solución particular de la ecuación es

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{3x}.$$

□

2. A.2 Caso complejo: $\lambda_0 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P(D)y &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \Rightarrow y = y_h + y_p \\ (D - \bar{\lambda}_0)^{k_0+1}(D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} &= 0 \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_h \end{aligned}$$

Comparando y_h con $\tilde{y}_h$, se tiene que

$$\begin{aligned} y_p &= (A_0 + A_1x + \cdots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma x} \cos w_0x + \\ &\quad (B_0 + B_1x + \cdots + B_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma x} \sin w_0x \end{aligned}$$

Al reemplazar y_p en la EDO se obtienen $2k_0 + 2$ ecuaciones.

EJEMPLO 3.7.

$$(D-1)(D-2)y = xe^{3x} \cos x$$

En este caso $\lambda_0 = 3 \pm i$, y la solución homogénea es $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$, luego

$$\begin{aligned} y_p &= (A_0 + A_1x)e^{3x} \cos x + (B_0 + B_1x)e^{3x} \sin x \\ y'_p &= (\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1x)e^{3x} \cos x + (\tilde{B}_0 + \tilde{B}_1x)e^{3x} \sin x \text{ (verificar)} \\ y''_p &= (\tilde{\tilde{A}}_0 + \tilde{\tilde{A}}_1x)e^{3x} \cos x + (\tilde{\tilde{B}}_0 + \tilde{\tilde{B}}_1x)e^{3x} \sin x \text{ (verificar)} \end{aligned}$$

donde $\tilde{A}_0, \tilde{B}_0, \tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \tilde{\tilde{A}}_0, \tilde{\tilde{B}}_0, \tilde{\tilde{A}}_1, \tilde{\tilde{B}}_1$ estan en funcion de A_0, B_0, A_1, B_1 .
Reemplazando y_p en la EDO, se tiene que

$$(\tilde{\tilde{A}}_0 + \tilde{\tilde{A}}_1 x)e^{3x} \cos x + (\tilde{\tilde{B}}_0 + \tilde{\tilde{B}}_1 x)e^{3x} \sin x = xe^{3x} \cos x$$

De donde se deduce que $\tilde{\tilde{A}}_0 = 0, \tilde{\tilde{A}}_1 = 1, \tilde{\tilde{B}}_0 = 0$ y $\tilde{\tilde{B}}_1 = 0$, lo que permite encontrar A_0, B_0, A_1 y B_1 .

B. Caso resonante: $\lambda_0 = \lambda_j$ para algún $j \in \{1, \dots, l\}$

1. **B.1 Caso real:** $\lambda_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(D)y &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \Rightarrow y = y_h + y_p \\ (D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} &= 0 \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_h \end{aligned}$$

La segunda ecuación se puede escribir de la forma

$$(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_0)^{m_0+k_0+1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l} \tilde{y} = 0$$

Es decir, λ_0 aumento su multiplicidad, luego, comparando $\tilde{y}_h$ e y_h , se tiene que y_p es combinación lineal de elementos de $\{x^{m_0}e^{\lambda_0 x}, x^{m_0+1}e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{m_0+k_0}e^{\lambda_0 x}\}$, es decir,

$$y_p = x^{m_0}(A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\lambda_0 x}$$

Al factor x^{m_0} se le llama *factor de resonancia*.

2. **B.2 Caso complejo:** $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ Repitiendo el proceso, se observa que y_p es de la forma

$$\begin{aligned} y_p &= x^{m_0}(A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma_0 x} \cos w_0 x \\ &\quad + x^{m_0}(B_0 + B_1x + \dots + B_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma_0 x} \sin w_0 x. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.8. Queremos encontrar una solución particular de la ecuación

$$(D - 1)^2(D + 1)y = (4x + 3)e^x.$$

Vemos que el coeficiente $\alpha = 1$ en la exponencial del lado derecho es valor característico de multiplicidad 2. En vista de lo discutido anteriormente proponemos una solución de la forma

$$y_p(x) = x^2(A_0 + A_1x)e^x = (A_0x^2 + A_1x^3)e^x.$$

El operador diferencial es $P(D) = (D - 1)^2(D + 1) = D^3 - D^2 - D + 1$. Tenemos

$$\begin{aligned} Dy_p(x) &= (A_1x^3 + (A_0 + 3A_1)x^2 + 2A_0x)e^x \\ D^2y_p(x) &= (A_1x^3 + (A_0 + 6A_1)x^2 + (4A_0 + 6A_1)x + 2A_0)e^x \\ D^3y_p(x) &= (A_1x^3 + (A_0 + 9A_1)x^2 + 6(A_0 + 3A_1)x + 6(A_0 + A_1))e^x, \end{aligned}$$

de modo que

$$P(D)y_p = (4A_0 + 6A_1 + 12A_1x)e^x.$$

Al igualar al lado derecho obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 3 &= 4A_0 + 6A_1 \\ 4 &= 12A_1, \end{cases}$$

cuya solución es $A_0 = 1/4$, $A_1 = 1/3$. Con esto encontramos la solución particular

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) e^x.$$

□

4.2.2. Método de variación de parámetros. Recordemos que la ecuación de orden n puede escribirse como un sistema de la forma

$$\begin{cases} z'(x) &= A_c(x)z(x) + b(x) & \text{para } x \in I \\ z_k(x_0) &= y^{(k-1)}(x_0) & \text{para } k = 1, \dots, n, \end{cases}$$

donde

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{Q} \end{pmatrix}.$$

Supongamos que tenemos una base $y_1, \dots, y_n$ de soluciones de la ecuación homogénea. Recordemos que

$$\Phi = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

es la matriz fundamental de soluciones y notemos que

$$A_c \Phi = \begin{pmatrix} y_1' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{pmatrix} = \Phi'.$$

Buscaremos una solución de la forma

$$y_p(x) = F_1(x)y_1(x) + \cdots + F_n(x)y_n(x).$$

Observemos que esta expresión es justamente la primera componente del vector ΦF y las otras componentes son sus derivadas. La idea es

encontrar el vector F de manera que ΦF sea solución del sistema de primer orden:

$$(\Phi(x)F(x))' = A_c(x)\Phi(x)F(x) + b(x).$$

La regla para la derivación de un producto es válida para matrices (ver Lema 5.1). Luego

$$\begin{aligned} (\Phi(x)F(x))' &= \Phi'(x)F(x) + \Phi(x)F'(x) \\ &= A_c(x)\Phi(x)F(x) + \Phi(x)F'(x), \end{aligned}$$

de manera que si encontramos F tal que $\Phi(x)F'(x) = b(x)$, entonces la primera componente del vector $\Phi(x)F(x)$ será una solución particular de la ecuación de orden n original. Ahora bien, la matriz Φ es invertible pues está formada por soluciones linealmente independientes de la ecuación. De este modo podemos tomar

$$F(x) = \int \Phi(x)^{-1}b(x) \, dx.^3$$

EJEMPLO 3.9. Encontremos una solución particular de la ecuación

$$y''(x) - y(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Los valores característicos de la ecuación son 1 y -1 , por lo que dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea son e^x y e^{-x} . Construimos

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Phi(x)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\Phi(x)^{-1}b(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-x}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1+e^{-x})} \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^x \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x} \, dx}{1 + e^{-x}} = -\ln \sqrt{1 + e^{-x}}$$

y

$$F_2(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{e^x \, dx}{1 + e^{-x}} = -\frac{e^x}{2} + \ln \sqrt{1 + e^x}.$$

Finalmente obtenemos la solución particular

$$\begin{aligned} y_p(x) &= F_1(x)e^x + F_2(x)e^{-x} \\ &= -e^x \ln \sqrt{1 + e^{-x}} - \frac{1}{2} + e^{-x} \ln \sqrt{1 + e^x}. \end{aligned}$$

³Se puede usar la regla de Cramer en lugar de calcular la inversa. Esto da origen a la fórmula de representación de Green, que estudiaremos más adelante.

□

5. EDO lineal de orden n a coeficientes variables

5.1. Ecuación homogénea.

5.1.1. Fórmulas de Abel y Liouville. En el caso de la ecuación homogénea con coeficientes variables, el método de los valores característicos no se puede aplicar y no existe una metodología general para encontrar las soluciones. No obstante, podemos fácilmente encontrar una solución linealmente independiente a partir de otra conocida en el caso de orden dos, utilizando la fórmula de Abel, dada en el Teorema 3.5. Esta dice que si y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden dos entonces el Wronskiano W satisface

$$W(x) = C \exp \left(- \int \bar{a}_1(x) dx \right).$$

Más precisamente, la Fórmula de Abel nos dice que

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 = C \exp \left(- \int \bar{a}_1(x) dx \right).$$

En los intervalos donde $y_1 \neq 0$ obtenemos

$$y_2' - \frac{y_1'}{y_1} y_2 = \frac{C}{y_1} \exp \left(- \int \bar{a}_1(x) dx \right),$$

que es una ecuación lineal de primer orden que sabemos resolver. Multiplicamos la ecuación por el factor integrante

$$\mu(x) = \exp \left(- \int \frac{y_1'}{y_1} dx \right) = \frac{1}{y_1}$$

y obtenemos

$$\left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{C}{y_1^2} \exp \left(- \int \bar{a}_1(x) dx \right).$$

Integrando obtenemos

$$y_2 = D y_1 + y_1 C \int \frac{1}{y_1^2} \exp \left(- \int \bar{a}_1(x) dx \right) du.$$

Si tomamos $D = 0$ obtenemos la **Fórmula de Liouville**

$$y_2 = C y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp \left(- \int \bar{a}_1(x) dx \right) du.$$

EJEMPLO 3.10. Se tiene la EDO $x^2y'' + xy' - y = 0$ y una solución $y_1 = x$. Se pide encontrar otra solución linealmente independiente y_2 . Para ello escribimos la ecuación normalizada:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0.$$

La fórmula de Abel nos da

$$xy'_2 - y_2 = C \exp\left(\int -\frac{dx}{x}\right),$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}y'_2 - \frac{1}{x^2}y_2 &= \frac{C}{x^3} \\ \left(\frac{y_2}{x}\right)' &= \frac{C}{x^3} \\ \frac{y_2}{x} &= \frac{C}{-2x^2} + D. \end{aligned}$$

Tomamos $C = -2$, $D = 0$ y obtenemos $y_2 = \frac{1}{x}$. □

Este método puede aplicarse a la ecuación de orden $n > 2$, teniendo en cuenta que la fórmula de Abel nos entregará una EDO de orden $n-1$ a coeficientes variables. Si bien no se obtiene de manera tan sencilla la solución faltante, esto constituye una *reducción de orden* con lo que la búsqueda de la n -ésima solución linealmente independiente puede ser más tratable.

5.1.2. *La ecuación de Euler.* La ecuación de Euler es de la forma

$$a_n x^n y^{(n)} + \dots a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$. Se hace el cambio de variable $x = e^u$, $z(u) = y(e^u)$, siempre y cuando $x \neq 0$. Con esto

$$z'(u) = e^u y'(e^u) = x y'(x).$$

Luego

$$z''(u) = e^u y'(e^u) + e^{2u} y''(e^u) = x y'(x) + x^2 y''(x),$$

con lo cual

$$x^2 y''(x) = z''(u) - z'(u)$$

y así sucesivamente. Al final queda una ecuación lineal de orden n a coeficientes constantes.

EJEMPLO 3.11. Estudiaremos la ecuación

$$x^2 y''(x) + xy'(x) = 0.$$

Los cambios de variable descritos arriba nos conducen a $z''(u) - z'(u) + z'(u) = 0$. Es decir, $z''(u) = 0$. Las soluciones de esta ecuación son de la forma $z(u) = Au + B$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Así,

$$y(x) = z(\ln(x)) = A \ln(x) + B, \quad x \neq 0.$$

□

EJEMPLO 3.12. Para la ecuación

$$x^3 y'''(x) + x^2 y''(x) - 4xy'(x) = 0$$

vemos que

$$\begin{aligned} xy'(x) &= z'(u) \\ x^2 y''(x) &= z''(u) - z'(u) \\ x^3 y'''(x) &= z'''(u) - 3z''(u) + 2z'(u). \end{aligned}$$

La ecuación se transforma en

$$z'''(u) - 2z''(u) - 3z'(u) = 0.$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

de donde los valores característicos son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -1$. Así, las soluciones son de la forma

$$z(u) = A + Be^{3u} + Ce^{-u},$$

de donde

$$y(x) = A + Bx^3 + Cx^{-1}.$$

□

5.2. Ecuación no homogénea. En esta sección presentaremos dos métodos para buscar soluciones particulares a la ecuación no homogénea. La fórmula de Green es una consecuencia del método de variación de parámetros, por lo que se necesita conocer *a priori* una base para el espacio $\mathcal{H}$ de soluciones homogéneas. El segundo método, que involucra series de potencias, no requiere conocer las soluciones de la ecuación homogénea, por lo que en muchas ocasiones es útil también para estudiar este tipo de ecuación.

5.2.1. *Fórmula de Green.* El método de variación de parámetros visto antes para coeficientes constantes se aplica en el caso de coeficientes variables. Para ello, se deben conocer primero n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.

Recordemos que en ese contexto se busca

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x) y_i(x),$$

donde el vector F satisface $\Phi F' = b$. Para encontrar las coordenadas del vector F' también se puede utilizar la regla de Cramer. Para ello, denotemos por W_i el determinante de la matriz Φ_i que se obtiene al cambiar la i -ésima columna de la matriz Φ por el vector b . El Wronskiano es $W = \det \Phi$. La regla de Cramer nos dice que $F'_i = \frac{W_i}{W}$. Pero notemos que la i -ésima columna de W_i tiene ceros en todas las componentes salvo la última. En virtud de la fórmula de cofactores para el cálculo del determinante podemos escribir $W_i = (-1)^{n+i} \overline{Q} \widetilde{W}_i$, donde $\widetilde{W}_i$ es el determinante de la matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, que se obtiene al eliminar de Φ la i -ésima columna y la n -ésima fila.

Con esto queda

$$\begin{aligned} y_p &= \sum_{i=1}^n F_i(x) y_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i(x) \int \frac{W_i(s)}{W(s)} ds \\ &= \int \frac{1}{W(s)} \sum_{i=1}^n y_i(x) W_i(s) ds \\ &= \int \frac{\overline{Q}(s)}{W(s)} \sum_{i=1}^n y_i(x) (-1)^{n+i} \widetilde{W}_i(s) ds. \end{aligned}$$

Nótese que hemos escrito s para la variable antes de integrar y x para la variable integrada. Si usamos de nuevo la fórmula de los cofactores para escribir la suma como el determinante de una matriz de tamaño

$n \times n$ obtenemos

$$y_p = \int \frac{\overline{Q}(s)}{W(s)} \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(s) & \dots & y_n(s) \\ y_1'(s) & \dots & y_n'(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & \dots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}}_{=R(x,s)} ds.$$

Hemos demostrado el siguiente resultado:

TEOREMA 3.8 (Teorema de Representación de Green). *Una solución particular de la ecuación no homogénea es*

$$y_p = \int G(x, s) \overline{Q}(s) ds, \quad \text{donde} \quad G(x, s) = \frac{R(x, s)}{W(s)}$$

es la **función de Green**.

5.2.2. Solución en serie de potencias. El siguiente método será presentado de manera ilustrativa; sin profundizar en los detalles teóricos que justifican su aplicación. Sean I un intervalo abierto, $x_0 \in I$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f analítica en un entorno de x_0 si existen $a_0, a_1, a_2, \dots$ tales que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ converge absolutamente para todo x suficientemente cercano a x_0 y

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Los coeficientes a_k son los mismos que entrega la fórmula de Taylor: $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$. Los polinomios, las exponenciales, todas las funciones trigonométricas e hiperbólicas y sus inversas son analíticas. Las derivadas y primitivas de funciones analíticas también lo son. Además, para encontrar una derivada o primitiva basta derivar o integrar la serie término a término. Algunos ejemplos de funciones y sus representaciones en series de potencias se pueden ver en el Cuadro 2.

Dada una ecuación diferencial lineal de orden n a coeficientes variables, nos proponemos encontrar una solución particular de la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

No nos preocuparemos acá por las condiciones que garantizan que la solución es en efecto lo suficientemente regular para tener una representación en serie de potencias. La estrategia es aplicar el operador

e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\ln(1-x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
$\text{sen}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$\text{senh}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

CUADRO 2. Algunas funciones y sus series de potencias.

diferencial a la expresión en serie para y , derivando término a término las series que aparezcan. Esto dará un sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes. Una vez resuelto el sistema construimos la serie. En muchos casos es posible relacionarla con otras series conocidas y reconocer a qué función pertenece.

EJEMPLO 3.13. Analicemos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Escribimos $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (aquí $x_0 = 0$) y tenemos que

$$\begin{aligned} y''(x) - y(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} - a_k) x^k. \end{aligned}$$

Al igualar el lado derecho a la función nula obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} - a_k) x^k = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$$

y de allí una ecuación para cada potencia de x . Para cada k debe cumplirse que

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - a_k = 0; \quad \text{es decir,} \quad a_{k+2} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)}.$$

Si $k = 2m$,

$$a_{2m} = \frac{a_{2m-2}}{(2m)(2m-1)} + \frac{1}{(2m)!} = \cdots = \frac{a_0}{(2m)!};$$

y si $k = 2m+1$,

$$a_{2m+1} = \frac{a_{2m-1}}{(2m+1)(2m)} + \frac{1}{(2m+1)!} = \cdots = \frac{a_1}{(2m+1)!}.$$

Así,

$$y(x) = a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + a_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Obtenemos una combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación. Para determinar las constantes a_0 y a_1 utilizamos las condiciones iniciales.

$$\begin{cases} 1 &= y(0) &= a_0 \\ 0 &= y'(0) &= a_1. \end{cases}$$

Tenemos finalmente que

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = \cosh(x).$$

También podíamos haber usado el método de los valores característicos pues los coeficientes son constantes. La solución general es

$$y(x) = ae^x + be^{-x}.$$

Las condiciones iniciales determinan para a y b el sistema

$$\begin{cases} a + b &= 1 \\ a - b &= 0, \end{cases}$$

que tiene como solución $a = b = \frac{1}{2}$. La solución queda

$$y(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh(x).$$

□

EJEMPLO 3.14. Encontraremos ahora una solución particular de la ecuación

$$x^2 y''(x) + xy'(x) = x(1-x)^2.$$

Escribimos $y_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ y tenemos que

$$x^2 y_p''(x) + xy_p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k x^k.$$

Debemos escribir el lado derecho en serie de potencias, para lo cual podemos usar la información en el Cuadro 2 y la derivación término a término. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1-x)^2} &= x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\ &= x \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k x^k. \end{aligned}$$

Igualando coeficiente a coeficiente vemos que $k^2 a_k = k$, de donde a_0 puede tomar cualquier valor y $a_k = 1/k$ para $k > 1$. Así, una solución particular es

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

En el Ejemplo 3.11 se encontraron las soluciones de la ecuación homogénea correspondiente. Con esa información, la solución general resulta ser

$$y(x) = A \ln(x) + B - \ln(1-x).$$

□

Transformada de Laplace

1. Definiciones y ejemplos

DEFINICIÓN 4.1. Dada $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **transformada de Laplace** de f a la función

$$(30) \quad \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

que asocia a $s \in \mathbb{R}$ el valor $\mathcal{L}[f](s)$ cuando la integral converge. Si la transformada de Laplace de una función existe para $s > c$, a la mínima cota “ c ” se le llama **asíntota** de la transformada.

Veamos algunos ejemplos para funciones conocidas:

EJEMPLO 4.1. Primero $f(t) = 1$. Claramente, si $s \leq 0$ la integral $\int_0^\infty e^{-st} dt$ no converge. Si $s > 0$ entonces

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

Luego $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$ para $s > 0$ (la asíntota es $c = 0$). □

EJEMPLO 4.2. Analicemos ahora $f(t) = e^{at}$ con $a \in \mathbb{C}$. Al igual que antes, es evidente que si $s \leq \operatorname{Re}(a)$ entonces la integral $\int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$ no converge. Si $s > \operatorname{Re}(a)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s-a}. \end{aligned}$$

De allí, $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$ para $s > \operatorname{Re}(a)$ (la asíntota es $c = \operatorname{Re}(a)$). □

EJEMPLO 4.3. Recordemos ahora que $\cos wt + i \operatorname{sen} wt = e^{iwt}$, de manera que $\operatorname{Re}(e^{iwt}) = \cos wt$ e $\operatorname{Im}(e^{iwt}) = \operatorname{sen} wt$ son la parte real e imaginaria de e^{iwt} , respectivamente. De ejemplo anterior tenemos que

$$\mathcal{L}[e^{iwt}](s) = \frac{1}{s - iw} = \frac{s + iw}{s^2 + w^2} \quad \text{para } s > 0.$$

En virtud de la definición de la transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}[\operatorname{Re}(f)] = \operatorname{Re}\mathcal{L}[f] \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[\operatorname{Im}(f)] = \operatorname{Im}\mathcal{L}[f],$$

con lo cual

$$\mathcal{L}[\cos wt](s) = \frac{s}{s^2 + w^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}[\operatorname{sen} wt](s) = \frac{w}{s^2 + w^2} \quad \text{para } s > 0.$$

□

De la linealidad de la integral tenemos la siguiente propiedad:

PROPIEDAD 4.1. *La transformada de Laplace es un operador lineal. Es decir, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y si f y g son funciones de $[0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$ tales que $\mathcal{L}[f](s)$ y $\mathcal{L}[g](s)$ existen, entonces*

$$\mathcal{L}[f + \lambda g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \lambda \mathcal{L}[g](s).$$

EJEMPLO 4.4. Recordemos que $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ y $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Para $s > 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cosh(t)](s) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}[e^t](s) + \mathcal{L}[e^{-t}](s) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 - 1}, \\ \text{y} \quad \mathcal{L}[\sinh(t)](s) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}[e^t](s) - \mathcal{L}[e^{-t}](s) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) \\ &= \frac{1}{s^2 - 1}. \end{aligned}$$

□

Una función f tiene una **discontinuidad de salto** en $a \in \text{Dom}(f)$ si los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existen, son finitos y distintos.

Una función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **continua por pedazos** si tiene un número finito o numerable de discontinuidades de salto en $[0, +\infty)$, pero sobre cada subintervalo acotado de $[0, +\infty)$ tiene a lo más un número finito de éstas.

Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 4.5. La función

$$f(t) = (-1)^{[t]} = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

extendida periódicamente a $[0, \infty)$ con período 2, se llama **onda cuadrada** y es continua por pedazos.

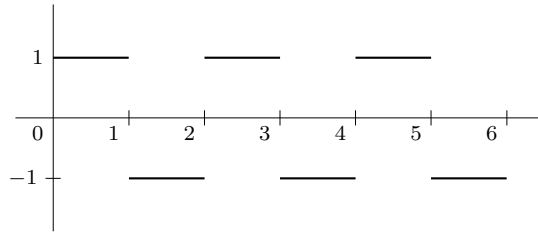


Gráfico de la onda cuadrada.

□

EJEMPLO 4.6. La función $f(t) = t - [t]$ o bien $f(t) = t, 0 \leq t < 1$ extendida periódicamente a $[0, \infty)$ con período 1, llamada **onda de dientes de sierra**, es continua por pedazos.

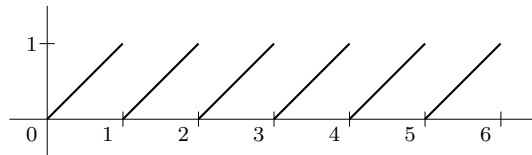


Gráfico de la onda de dientes de sierra.

□

EJEMPLO 4.7. La función $f(t) = \tan(t)$ no es continua por pedazos pues

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(t) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(t) = +\infty.$$

□

EJEMPLO 4.8. La función

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

tampoco es continua por pedazos. □

DEFINICIÓN 4.2. Una función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es **de orden exponencial** si existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$. Al menor de tales α se le llama **orden exponencial** de f . Gráficamente, el hecho de tener orden exponencial significa que la función está encerrada entre $M e^{\alpha t}$ y $-M e^{\alpha t}$.

DEFINICIÓN 4.3. El espacio $\mathcal{C}_\alpha$ es el conjunto de las funciones $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que son continuas por pedazos y de orden exponencial α . Es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de $[0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$.

Observemos que si $f' \in \mathcal{C}_\alpha$ entonces

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(s)| ds \\ &\leq |f(0)| + \frac{M}{\alpha} e^{\alpha x} \\ &\leq \widetilde{M} e^{\alpha x}, \end{aligned}$$

de modo que $f \in \mathcal{C}_\alpha$.

PROPIEDAD 4.2. Si $f \in \mathcal{C}_\alpha$ entonces para todo $s > \alpha$, existe $\mathcal{L}[f](s)$ (y converge absolutamente). Además

$$|\mathcal{L}[f](s)| \leq \frac{M}{s - \alpha}$$

para todo $s > \alpha$. En particular, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que si la integral converge absolutamente, entonces converge. Con esto basta probar que

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt \leq \frac{M}{s - \alpha}$$

para todo $s > \alpha$. En efecto,

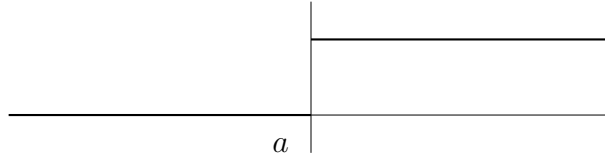
$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt &= \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \\
 &\leq M \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} dt \\
 &\leq M \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt \\
 &\leq M \frac{1}{-s + \alpha} e^{(-s+\alpha)t} \Big|_0^\infty \\
 &\leq \frac{C}{s - \alpha}.
 \end{aligned}$$

□

EJERCICIO PROPUESTO 4.1. Demostrar que $t^k, k \in \mathbb{N}$, tiene transformada de Laplace y que $\mathcal{L}[t^k](s) = \frac{k!}{s^{k+1}}, s > 0$.

La **función escalón de Heaviside** se define como

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$



Función escalón de Heaviside $H_a(t)$.

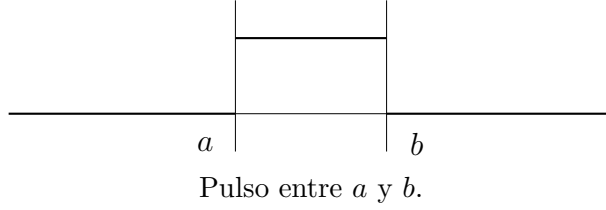
Observemos que si $a \geq 0$, entonces $H_a(t) = H_0(t - a)$. La transformada de Laplace de H_a , con $a \geq 0$ es

$$\mathcal{L}[H_a](s) = \int_0^\infty e^{-st} H_a(t) dt = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-as}$$

para $s > 0$.

Si $a < b$ definimos el **pulso entre a y b** como

$$P_{ab}(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a \leq t < b \\ 0 & t \geq b. \end{cases}$$



Notar que $P_{ab}(t) = H_a(t) - H_b(t)$. Luego, su transformada de Laplace para $0 \leq a < b$ será

$$\mathcal{L}[P_{ab}(t)](s) = \mathcal{L}[H_a(t) - H_b(t)](s) = \mathcal{L}[H_a(t)](s) - \mathcal{L}[H_b(t)](s).$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}[P_{ab}(t)](s) = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs}) \quad \text{para } s > 0.$$

2. Propiedades básicas de la transformada de Laplace

En esta sección estudiaremos reglas operacionales que serán útiles para aplicar la transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones lineales de orden superior y sistemas lineales de primer orden.

2.1. Transformada de una derivada. Sea $f \in \mathcal{C}_\alpha$ derivable. Calculemos la transformada de Laplace de su derivada para $s > \alpha$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt \\ &= s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} \\ &= s\mathcal{L}[f](s) + \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-st} f(t). \end{aligned}$$

Como f es de orden exponencial α , se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-st} f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-st} e^{\alpha t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-\alpha)t} = 0$$

pues $s > \alpha$. Llamando $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ tenemos que

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+) \quad \text{para } s > \alpha.$$

Para la segunda derivada, si $s > \alpha$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''](s) &= s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0^+) \\ &= s(s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+)) - f'(0^+) \\ &= s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0^+) - f'(0^+). \end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento obtenemos, para $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k)}(0^+).$$

EJEMPLO 4.9. Un cohete despegue con velocidad inicial v_0 desde la Tierra en forma vertical. Luego de algunos segundos, se activan los motores de emergencia, por lo que adquiere una aceleración $a > 0$ durante un intervalo de tiempo breve. Si la gravedad de la Tierra es g , encuentre la ecuación de movimiento del cohete suponiendo que tiene masa m y (t_1, t_2) es el intervalo en el que funcionan los motores de emergencia, con $t_2 > t_1$.

De la sumatoria de fuerzas obtenemos

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -mg + ma(P_{t_1 t_2}(t)),$$

donde $y(t)$ es la posición del cohete con respecto a la Tierra. Las condiciones iniciales del cohete son $y(0) = 0$ y $y'(0) = v_0$. Eliminando m a ambos lados y aplicando $\mathcal{L}$ se obtiene la ecuación

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = a\mathcal{L}[P_{t_1 t_2}(t)](s) - g\mathcal{L}[1](s)$$

recordando las expresiones para $\mathcal{L}[y''(t)](s)$, $\mathcal{L}[P_{t_1 t_2}(t)](s)$ y $\mathcal{L}[1](s)$, la expresión queda

$$s^2 \mathcal{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+) = \frac{a}{s}(e^{-t_1 t} - e^{-t_2 t}) - \frac{g}{s}$$

Pero $y(0^+) = 0$ y $y'(0^+) = v_0$. Luego

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{v_0}{s^2} + \frac{a}{s^3} e^{-t_1 t} - \frac{a}{s^3} e^{-t_2 t} - \frac{g}{s^3}$$

En breve veremos cómo recuperar una función a partir de su transformada. Continuaremos este cálculo en el Ejemplo 4.12. $\square$

2.2. Transformada de una primitiva. Sea $f \in \mathcal{C}_\alpha$ localmente integrable. Sea $a \in \mathbb{R}$. Encontremos la transformada de la función $F(t) = \int_a^t f(u) du$. Para $s > \alpha$ se tiene

$$\mathcal{L}[F'](s) = s\mathcal{L}[F](s) - F(0^+).$$

Por lo tanto, la transformada de F es

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s} \int_0^a f(u) du$$

para $s > \alpha$.

Si denotamos $\int_a^t \int_a^t f(u) du = \int_a^t \left(\int_a^u f(v) dv \right) du$. La transformada de esta expresión es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\int_a^t \int_a^t f(u) du \right] (s) &= \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[\int_a^t f(u) du \right] (s) - \frac{1}{s} \int_0^a \int_a^t f(u) du \\ &= \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[f](s) - \frac{1}{s^2} \int_0^a f(u) du - \frac{1}{s} \int_0^a F(t) dt. \end{aligned}$$

repetiendo el proceso, se obtiene la fórmula para la transformada de la n -ésima integral:

$$\mathcal{L} \left[\underbrace{\int_a^t \dots \int_a^t}_{n \text{ veces}} f(u) du \right] (s) = \frac{1}{s^n} \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^k} \int_0^a \underbrace{\int_a^t \dots \int_a^t}_{n-k \text{ veces}} f(u) du.$$

2.3. Traslaciones. Una traslación en el dominio temporal t corresponde a un factor exponencial en el dominio de Laplace s . Si $f \in \mathcal{C}_\alpha$ y $a \in \mathbb{R}$, la función f trasladada hacia la derecha se define *en todo* $[0, \infty)$ como $H(t-a)f(t-a)$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} H(t-a) f(t-a) dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u) du \\ &= e^{-sa} \mathcal{L}[f(t)](s). \end{aligned}$$

De manera análoga, una traslación en el dominio de Laplace corresponde a un factor exponencial en el dominio temporal.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s-a) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} e^a f(t) dt \\ &= \mathcal{L}[e^{at} f(t)](s). \end{aligned}$$

2.4. Igualdad de transformadas. Nos proponemos ver ahora cuándo una función está unívocamente determinada por su transformada de Laplace. Nos interesa saber cuándo $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$ implica que $f = g$. La respuesta está dada por el siguiente teorema, que enunciamos sin demostración:

TEOREMA 4.1 (Lerch). Si $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$ y $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$ para todo $s > \alpha$ entonces $f(t) = g(t)$ para todo $t \geq 0$, salvo en la unión de las discontinuidades de f y g .

2.5. Convolución. Sean f y g funciones en $\mathcal{C}_\alpha$. El **producto de convolución** entre f y g se define como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds.$$

Se deja al lector verificar la siguiente:

PROPIEDAD 4.3. El producto de convolución es conmutativo, asociativo y distribuye con respecto a la suma en $\mathcal{C}_\alpha$.

TEOREMA 4.2. Sean $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$. Entonces

$$\mathcal{L}[(f * g)](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s).$$

En palabras, la transformada de la convolución es el producto de las transformadas.

DEMOSTRACIÓN. Dadas f y g en $\mathcal{C}_\alpha$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(f * g)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(u)g(t-u)du \right) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt. \end{aligned}$$

Cambiando el orden de integración y haciendo un cambio de variables tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt &= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} f(u)g(t-u)dtdu \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(w+u)} f(u)g(w)dwdu \\ &= \int_0^\infty e^{-su} f(u)du \int_0^\infty e^{-sw} g(w)dw \\ &= \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s). \end{aligned}$$

□

2.6. Convergencia Uniforme. Veremos ahora unos detalles técnicos de convergencia. Sean $f \in \mathcal{C}_\alpha$ y $M > \alpha_0 > \alpha$. Definimos

$$\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad \text{y} \quad \Phi_n(s) = \int_0^n e^{-st} f(t)dt,$$

con $s \in I = [\alpha_0, M]$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |\Phi_n(s) - \Phi(s)| &= \left| \int_n^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \\ &\leq \frac{C}{s - \alpha} e^{-(s-\alpha)n} \Big|_n^\infty \\ &\leq \frac{C}{s - \alpha} e^{-(s-\alpha)n} \end{aligned}$$

para todo $s \in I$. Si $\|g\|_I = \sup_{s \in I} |g(s)|$, entonces

$$\begin{aligned} \|\Phi_n - \Phi\|_I &\leq \sup_{s > \alpha} \frac{C}{s - \alpha} e^{-(s-\alpha)n} \\ &= \frac{C}{\alpha_0 - \alpha} e^{-(\alpha_0 - \alpha)n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\Phi - \Phi_n\|_I \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, con lo que Φ_n converge uniformemente a Φ en I .

2.7. Diferenciabilidad. Sea $f \in \mathcal{C}_\alpha$. Calcularemos la derivada con respecto a s de la transformada de Laplace de f .

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st} f(t) dt \\ &= -\mathcal{L}[tf(t)](s). \end{aligned}$$

La derivación bajo el signo integral se justifica por la convergencia uniforme. Repitiendo el proceso, la derivada n -ésima de la transformada de Laplace de f se expresa como

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f(t)](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s).$$

2.8. Integrabilidad. Gracias de nuevo a la convergencia uniforme, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^s \mathcal{L}[f(t)](u) du &= \int_0^s \left(\int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \right) du \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{-ut} f(t) du \right) dt \\
 &= \int_0^\infty \left(\frac{-1}{t} e^{-ut} \Big|_0^s f(t) \right) dt \\
 &= - \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt \\
 &= -\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt
 \end{aligned}$$

para $f \in \mathcal{C}_\alpha$. Si en la fórmula de la derivada de la transformada, se toma $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, se obtiene

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] = -\mathcal{L}[f(t)](s).$$

Por lo tanto

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) - \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) = - \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du.$$

Si $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{C}_\alpha$ se tiene $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) = 0$. En consecuencia

$$\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du$$

Se puede verificar que $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{C}_\alpha$ cuando $f(t) \in \mathcal{C}_\alpha$ y $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe y es finito. Bajo esta condición obtenemos

$$\int_0^s \mathcal{L}[f(t)](u) du = - \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt,$$

que equivale a integrar desde 0 a ∞ . Es decir,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt.$$

3. Antitransformadas y aplicaciones

Una función f (en el dominio temporal) es **antitransformada** de una función ρ (en el dominio de Laplace) si se cumple que $\mathcal{L}[f] = \rho$. Se denota como $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\rho](t)$.

En esta sección estudiaremos un método para calcular antitransformadas de funciones racionales y presentaremos aplicaciones a la ecuación diferencial lineal de orden n y a sistemas de ecuaciones lineales de primer orden.

3.1. Descomposición en fracciones Parciales. Repasaremos el método de descomposición en fracciones parciales estudiado en el curso de cálculo integral. Supongamos se tiene la expresión racional $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son polinomios a coeficientes reales tales que $gr(p) < gr(q)$. Se quiere escribir $\frac{p(x)}{q(x)}$ como una suma de expresiones más simples. Se pueden presentar varios casos:

1. $q(x)$ tiene n raíces reales distintas y simples: $q(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n)$, con $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Hacemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}.$$

2. $q(x)$ tiene una raíz real de multiplicidad n : $q(x) = (x - a)^n$. Hacemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n}.$$

3. $q(x)$ tiene 1 raíz compleja simples. Entonces su conjugado también es raíz simple, de modo que $q(x) = ax^2 + bx + c = (x - z)(x - \bar{z})$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Hacemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

4. Si $q(x)$ tiene 1 raíz compleja de multiplicidad n : $q(x) = (ax^2 + bx + c)^n = (x - z)^n(x - \bar{z})^n$ con $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Hacemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

5. Cualquier combinación de estos casos.

Una vez descompuesta la expresión original, se deben encontrar los valores de los coeficientes de la parte derecha. Existen varias formas de encontrarlos, veremos 2 métodos:

- Método 1: Multiplicar por $q(x)$ a ambos lados y evaluar raíz por raíz (sirve cuando las raíces son simples).
- Método 2: Desarrollar la suma de la parte derecha e igualar coeficientes.

EJEMPLO 4.10. Se desea descomponer la expresión

$$\frac{s}{s^2 - 3s + 2}.$$

Las raíces son $s = 1$ y $s = 2$, ambas simples. La expresión se descompone como

$$\frac{s}{s^2 - 3s + 2} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s - 2}.$$

Utilizamos el método 1. Para ello multiplicamos a ambos lados por $q(s)$. Obtenemos

$$s = A(s - 2) + B(s - 1).$$

Evaluando en $s = 1$ vemos que $A = -1$ y evaluando en $s = 2$ vemos que $B = 2$. $\square$

EJEMPLO 4.11. Se desea descomponer la expresión

$$\frac{1}{s^2((s - a)^2 + b^2)}.$$

Las raíces son $s = 0$, con multiplicidad 2, y $s = a \pm bi$, ambas simples.

Utilizando una combinación de **2.** y **4.**, la descomposición queda

$$(31) \quad \frac{1}{s^2((s - a)^2 + b^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C + Ds}{(s - a)^2 + b^2}.$$

Como hay una raíz doble usaremos el método 2. Desarrollamos el lado derecho de (31) y obtenemos

$$\frac{1}{s^2((s - a)^2 + b^2)} = \frac{As((s - a)^2 + b^2) + B((s - a)^2 + b^2) + (C + sD)s^2}{s^2((s - a)^2 + b^2)}.$$

Reordenando los términos deducimos una igualdad para los numeradores:

$$1 = s^3(A + D) + s^2(-2aA + B + C) + s(A(a^2 + b^2) - 2aB) + (Ba^2 + Bb^2).$$

Igualando los coeficientes obtenemos 4 ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= A + D \\ 0 &= -2aA + B + C \\ 0 &= A(a^2 + b^2) - 2aB \\ 1 &= Ba^2 + Bb^2 \end{aligned}$$

que nos dan

$$A = \frac{2a}{(a^2 + b^2)^2}, \quad B = \frac{1}{a^2 + b^2}, \quad C = \frac{3a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}, \quad D = \frac{-2a}{(a^2 + b^2)^2}.$$

□

Más adelante, en el Ejemplo 5.11, mostraremos una aplicación concreta del método de fracciones parciales a un problema de intercambio de masas atmosféricas.

3.2. Aplicación a la EDO lineal de orden n . Se tiene la siguiente EDO a coeficientes constantes:

$$P(D)y(t) = \overline{Q}(t)$$

con $P(D)$ un operador diferencial de orden n normalizado ($a_n = 1$) y $\overline{Q}(t)$ combinación lineal de funciones en $\mathcal{C}_\alpha$. Aplicando $\mathcal{L}$ a ambos lados de la EDO, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\sum_{j=1}^n a_j D^j y \right] (s) &= \mathcal{L}[\overline{Q}](s) \\ \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{L} [D^j y] (s) &= \mathcal{L}[\overline{Q}](s). \end{aligned}$$

Pero se sabe que

$$\mathcal{L} [D^j y] (s) = s^j \mathcal{L}[y](s) - R_j(s),$$

donde

$$R_j(s) = \sum_{k=0}^{j-1} s^k y^{(j-k-1)}(0^+).$$

Con esto la ecuación queda

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j s^j \right) \mathcal{L}[y](s) - \sum_{j=1}^n a_j R_j(s) = \mathcal{L}[\overline{Q}](s).$$

Escribimos entonces

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{R(s)}{P(s)} + \frac{\mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s)}{P(s)},$$

donde

$$P(s) = \sum_{j=1}^n a_j s^j \quad \text{y} \quad R(s) = \sum_{j=1}^n a_j R_j(s).$$

Llamando $y_h(t)$ e $y_p(t)$ a las funciones tales que

$$\mathcal{L}[y_h](s) = \frac{R(s)}{P(s)} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}[y_p] = \frac{\mathcal{L}[\overline{Q}](s)}{P(s)}$$

se tiene que

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[y_h] + \mathcal{L}[y_p].$$

Luego

$$y_h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R}{P} \right] (t) \quad \text{e} \quad y_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathcal{L}[\overline{Q}]}{P} \right] (t).$$

Para encontrar $y_p(t)$, consideremos $G(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{P} \right] (t)$. Tenemos

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[G(t)](s) \mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s)] (t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[(G * \overline{Q})(t)](s)] (t) \\ &= (G * \overline{Q})(t) \\ &= \int_0^t G(t - \theta) \overline{Q}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Todo se reduce entonces a encontrar antitransformadas de funciones de la forma $\frac{T(s)}{P(s)}$, donde T y P son polinomios y $gr(P) > gr(T)$ (observe que P es de grado n , R es de grado $n-1$ y 1 es de grado cero).

Gracias a la linealidad, si descomponemos en fracciones parciales, basta averiguar cuáles son las antitransformadas de cada uno de los

términos que aparecen en la descomposición. Primero recordemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-\lambda} &= \mathcal{L}[H(t)](s-\lambda) = \mathcal{L}[e^{\lambda t}H(t)](s) \\ \frac{1}{(s-\lambda)^k} &= \mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s-\lambda) = \mathcal{L}\left[e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s) \\ \frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2} &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{w}\sin(wt)\right](s-\sigma) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\sigma t}}{w}\sin(wt)\right](s) \\ \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2} &= \mathcal{L}[\cos(wt)](s-\sigma) = \mathcal{L}[e^{\sigma t}\cos(wt)](s).\end{aligned}$$

Inmediatamente obtenemos las antitrasformadas

$$\begin{aligned}e^{\lambda t}H(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\lambda}\right](t) \\ e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\lambda)^k}\right](t) \\ \frac{e^{\sigma t}}{w}\sin(wt) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2}\right](t) \\ e^{\sigma t}\cos(wt) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}\right](t).\end{aligned}$$

Esto es casi todo lo que se necesita para determinar la antitrasformada de una función de la forma $\frac{T(s)}{P(s)}$. Sólo falta encontrar las antitrasformadas de fracciones del tipo

$$1. \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^n}\right](t) \quad \text{y} \quad 2. \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^n}\right](t)$$

para $n \geq 2$. Haremos los cálculos para $n = 2$ y dejamos el caso general como ejercicio para el lector.

1. Basta considerar $\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+a^2} = \frac{-2s}{(s^2+a^2)^2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right](t) &= \frac{-1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+a^2}\right](t) \\ &= \frac{-1}{2a}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin(at)](s)\right](t) \\ &= \frac{1}{2a}t\sin(at).\end{aligned}$$

2. Recordando que $\mathcal{L}\left[\int_0^t f\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f]$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right](t) \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{2a}t\sin(at)\right](s)\right](t) \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{1}{2a}t\sin(at)\right](s)\right](t) \\
 &= \int_0^t \frac{1}{2a}t\sin(at) \\
 &= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\sin(at) - t\cos(at)\right).
 \end{aligned}$$

Resumimos los ejemplos más relevantes de funciones y sus transformadas en la siguiente tabla:

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s - \lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$
$e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s - \lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w}\sin(wt)$	$\frac{1}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$e^{\sigma t}\cos(wt)$	$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{a}\sin(at) - t\cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

EJEMPLO 4.12. Continuando el Ejemplo 4.9 del cohete, hay que encontrar las funciones que al ser transformadas por $\mathcal{L}$, equivalen a

cada uno de los sumandos del miembro derecho de la ecuación

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{v_0}{s^2} + \frac{a}{s^3}e^{-t_1t} - \frac{a}{s^3}e^{-t_2t} - \frac{g}{s^3}.$$

Utilizando las conclusiones de la discusión precedente vemos que

$$\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}\left[v_0t + \frac{a}{2}(t-t_1)^2H(t-t_1) - \frac{a}{2}(t-t_2)^2H(t-t_2) + \frac{gt^2}{2}\right].$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento del cohete es

$$y(t) = v_0t + \frac{a}{2}(t-t_1)^2H(t-t_1) - \frac{a}{2}(t-t_2)^2H(t-t_2) + \frac{gt^2}{2}.$$

□

EJEMPLO 4.13. Resolvamos ahora el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

utilizando la transformada de Laplace. Para ello observemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + 2y' + 2y](s) &= \mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] \\ &= s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+) \\ &\quad + 2(s\mathcal{L}[y](s) - y(0^+)) + 2\mathcal{L}[y](s) \\ &= (s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[y](s) - s - 3. \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + 2y' + 2y](s) &= 0 \\ (s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[y](s) - s - 3 &= 0 \\ (s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[y](s) &= s + 3 \\ \mathcal{L}[y](s) &= \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 2}. \end{aligned}$$

Como las raíces de $s^2 + 2s + 2 = 0$ son complejas, se escribe ese polinomio de la forma $(s + 1)^2 + 1$, con lo que se obtiene

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s + 3}{(s + 1)^2 + 1} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{2}{(s + 1)^2 + 1}.$$

Como $\mathcal{L}[e^{-x} \cos x](s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$ y $\mathcal{L}[e^{-x} \sin x](s) = \frac{1}{(s+1)^2+1}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}[e^{-x} \cos x](s) + 2\mathcal{L}[e^{-x} \sin x](s) \\ \mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}[e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x](s) \\ y(x) &= e^{-x}(\cos x + 2 \sin x).\end{aligned}$$

□

4. Funciones y derivadas generalizadas

4.1. Funciones generalizadas. Sea $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. La **acción** de Ψ sobre una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$\Psi[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)f(t) dt$$

cuando esta integral esté bien definida.

La **delta de Dirac** pertenece a las llamadas **funciones generalizadas** o **distribuciones**. No es exactamente una función, sino más bien una regla que a cada función continua f le asigna un número real, que es su valor en cero $f(0)$. Las funciones generalizadas se definen en términos de su acción sobre cierto tipo de funciones. En estricto rigor, definimos la acción de la delta de Dirac sobre una función continua f mediante

$$\delta[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt = f(0).$$

La notación de integral es bastante sugerente pero se debe recordar que la delta de Dirac no es una función, aunque comparta ciertas propiedades con las funciones integrables. Siguiendo la notación presentada arriba, escribiremos

$$\delta_a[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t) dt = f(a).$$

La delta de Dirac modela un impulso, golpe o chispazo. Se interpreta como un gran estímulo aplicado instantáneamente a un sistema.

EJEMPLO 4.14. Tomando la función continua $f(t) \equiv 1$ tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot 1 dt = 1.$$

□

Una propiedad interesante de la delta de Dirac es que se puede aproximar, en cierto sentido, por funciones propiamente tales. Más precisamente, su acción sobre una función continua se puede obtener como el límite de las acciones de una sucesión de funciones integrables. Sea $\Phi = P_{01}$ el pulso entre 0 y 1. Si $\Phi_n(t) = n\Phi(nt)$ entonces

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(t) dt = 1$ para cada n .
- Si $a > 0$ y f es continua entonces

$$\int_{-\infty}^{-a} f_n(t) f(t) dt = \int_a^{+\infty} f_n(t) f(t) dt = 0.$$

- Si f es continua entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f(t) dt = f(0) = \delta[f].$$

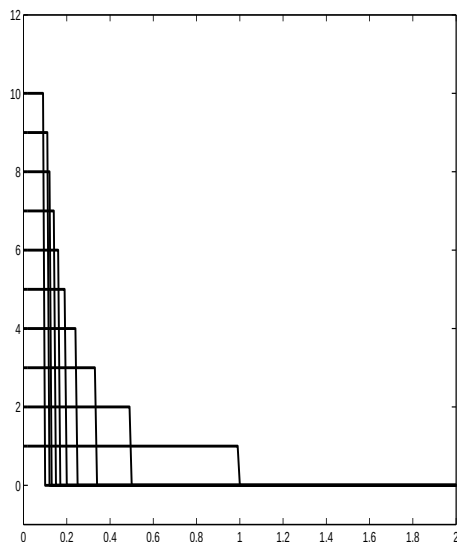


FIGURA 1. Las funciones Φ_n .

Observación: Cabe destacar que las funciones Φ_n no son las únicas que dan origen a δ ; basta con que cumplan las propiedades enunciadas.

La transformada de Laplace de una función f en el punto s puede interpretarse como la acción de f sobre la función $t \mapsto e^{-st}$. Tiene sentido entonces definir la transformada de Laplace de la delta de Dirac

mediante

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta](s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}[\Phi_n](s) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \Phi_n(t) e^{-st} dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/n} n e^{-st} dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{s} (1 - e^{-s/n}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

para $s \in \mathbb{R}$.

Observemos que esto es consistente con

$$\mathcal{L}[\delta](s) = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = e^0 = 1.$$

Por otra parte, la delta de Dirac es el elemento neutro para el producto de convolución. Es decir, para $f \in \mathcal{C}_\alpha$ se tiene

$$\mathcal{L}[f * \delta] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[\delta] = \mathcal{L}[f].$$

Por el Teorema de Lerch, $f * \delta_0 = \delta_0 * f = f$ (salvo, quizá, en una cantidad numerable de puntos).

4.2. Derivadas generalizadas. Supongamos que f y g son funciones derivables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)g(t) = 0$. La fórmula de integración por partes nos dice que

$$\int_{-\infty}^\infty f'(t)g(t)dt = - \int_{-\infty}^\infty f(t)g'(t)dt.$$

Supongamos que ahora que f es simplemente integrable y g es derivable con derivada acotada en $\mathbb{R}$. Supongamos como antes que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)g(t) = 0$. La fórmula de integración por partes sirve para definir una especie de “derivada” de f , aun cuando f no sea derivable en el sentido usual. Es el concepto de **derivada generalizada**. Aunque no exista la derivada como función, definimos la acción de la derivada generalizada de f (como función generalizada) mediante

$$f'_{gen}[g] = -f[g'].$$

Es decir,

$$\int_{-\infty}^\infty f'_{gen}(t)g(t)dt = - \int_{-\infty}^\infty f(t)g'(t)dt.$$

Si f es derivable, con derivada acotada, la acción de f'_{gen} sobre una función integrable g coincide con la acción de la función f' sobre g . En lo que sigue usaremos la notación f' para denotar f'_{gen} cuando no haya ambigüedad.

EJEMPLO 4.15. El escalón de Heaviside, H_a , no es derivable en todo $\mathbb{R}$ pues es discontinua en a . Sin embargo podemos definir su derivada generalizada. Sea g una función derivable tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} H'_a[g] &= \int_{-\infty}^{\infty} H'_a(t)g(t)dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} H_a(t)g'(t)dt \\ &= - \int_a^{\infty} g'(t)dt \\ &= g(a) \\ &= \delta_a[g]. \end{aligned}$$

Entonces, la derivada generalizada de H_a es δ_a . Escribimos

$$H'_a(t) = \delta(t - a).$$

□

EJERCICIO PROPUESTO 4.2. Compruebe que la regla para la transformada de una derivada dada en la subsección 2.1 sigue siendo válida para derivadas generalizadas.

4.3. Aplicación a la ecuación lineal de orden n . Al igual que en la subsección 3.2, consideremos una EDO a coeficientes constantes:

$$P(D)y = \overline{Q},$$

donde $P(D)$ es un operador diferencial de orden n normalizado ($a_n = 1$) y $\overline{Q}$ es combinación lineal de funciones en $\mathcal{C}_\alpha$.

Recordemos que una solución particular está dada por

$$y_p(t) = \int_0^t G(t - \theta)\overline{Q}(\theta)d\theta,$$

donde

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{P} \right] (t).$$

Pero esta G es precisamente la solución de $P(D)G = \delta$ pues

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[G](s) &= \frac{1}{P(s)} \\ P(s)\mathcal{L}[G](s) &= 1 \\ \mathcal{L}[P(D)G](s) &= \mathcal{L}[\delta] \\ P(D)G &= \delta\end{aligned}$$

en el sentido generalizado.

Sistemas lineales de primer orden

1. Introducción

Hasta aquí se han estudiado ecuaciones lineales con una sola función incógnita. Estudiaremos ahora sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, tanto porque permiten modelar problemas físicos que involucran la interacción de diversas variables dependientes, como también porque a ellos pueden reducirse las ecuaciones lineales de grado superior.

Comenzaremos por comentar algunos resultados acerca de funciones vectoriales y matriciales.

DEFINICIÓN 5.1. El espacio

$$\mathcal{C}^n(I)^m = \underbrace{\mathcal{C}^n(I) \times \cdots \times \mathcal{C}^n(I)}_{m \text{ veces}}$$

está conformado por los vectores de m funciones n veces continuamente derivables en el intervalo I . De manera análoga, $\mathcal{C}^n(I)^{m \times k}$ son las matrices de $m \times k$ funciones n veces continuamente derivables en el intervalo I . Haremos la identificación $\mathcal{C}^n(I)^{m \times 1} = \mathcal{C}^n(I)^m$.

Estos conjuntos tienen estructura de espacio vectorial para la suma y ponderación por escalar componente a componente. La integración y derivación se hace componente a componente:

$$\begin{aligned} \int \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \int f_{1,1} & \cdots & \int f_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int f_{m,1} & \cdots & \int f_{m,k} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,k} \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} f'_{1,1} & \cdots & f'_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{m,1} & \cdots & f'_{m,k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Además tenemos la regla para la derivación de un producto.

LEMA 5.1. Si $A(t) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ y $B(t) \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$, con $n, m, p \in \mathbb{N}$, entonces

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

DEMOSTRACIÓN. Para la componente ip se cumple que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(t)b_{jp}(t) \right)' &= \sum_{j=1}^m (a_{ij}(t)b_{jp}(t))' \\ &= \sum_{j=1}^m (a'_{ij}(t)b_{jp}(t) + a_{ij}(t)b'_{jp}(t)) \\ &= \sum_{j=1}^m a'_{ij}(t)b_{jp}(t) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(t)b'_{jp}(t). \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 5.2. Un **sistema lineal** de EDO en $\mathbb{R}^n$ es un sistema de n ecuaciones escrito de la forma

$$(32) \quad \begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0, \end{cases} \quad \text{para } t \in I$$

donde I es un intervalo, $A(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B(t) \in \mathbb{R}^n$ para cada t en I , y $X_0 \in \mathbb{R}^n$ son condiciones iniciales en $t = t_0 \in I$. En el caso $B \equiv 0$ se dice que el sistema es **homogéneo**. En el caso que A es una matriz constante, se dice que el sistema es **a coeficientes constantes**.

EJEMPLO 5.1 (Polución en dos estanques). Dos estanques 1 y 2, que contienen $V[m^3]$ de agua, se encuentran interconectados por medio de un canal, por el cual fluye agua desde 1 a 2 a razón de $b[\frac{m^3}{s}]$. El sistema es alimentado a través del estanque 1 a razón de $b[\frac{m^3}{s}]$, con un poluyente de concentración $\sigma[\frac{kg}{m^3}]$, que contamina el agua. El agua sale del sistema por un canal del estanque 2, con un caudal de $b[\frac{m^3}{s}]$. En esta situación se produce una contaminación del agua en ambos estanques. Para tratar de disminuir este efecto negativo, se propone añadir otro canal que conecte a los dos estanques, para que devuelva flujo de 2 a 1, a razón de $b\lambda[\frac{m^3}{s}]$, donde $\lambda > 0$. Sin embargo, para evitar el rebalse del sistema, se debe aumentar el flujo del canal ya existente a $b(1 + \lambda)[\frac{m^3}{s}]$. ¿Cuánto ayuda esta solución a disminuir la polución del agua en los estanques?

Para el estanque 1, tenemos que la variación de la cantidad de poluyente

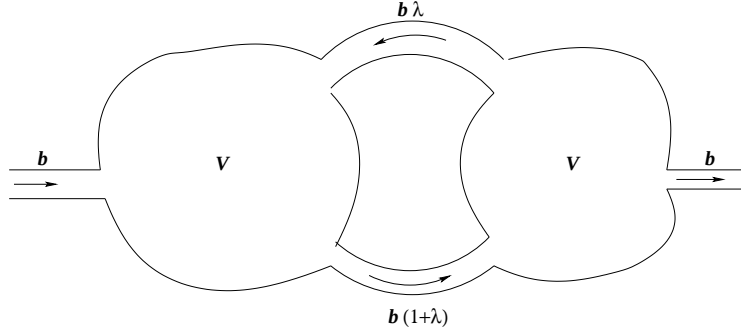


FIGURA 1. Polución en dos estanques del ejemplo 5.1

por unidad de tiempo es la diferencia de las concentraciones que entran y las que salen por unidad de tiempo, es decir:

$$x_1' = b\sigma + b\lambda x_2 \frac{1}{V} - b(1+\lambda)x_1 \frac{1}{V}.$$

Repitiendo el razonamiento para el estanque 2, resulta el sistema:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= b\sigma + \frac{b\lambda}{V}x_2(t) - \frac{b(1+\lambda)}{V}x_1(t) \\ x_2'(t) &= \frac{b(1+\lambda)}{V}x_1(t) - \frac{b\lambda}{V}x_2(t) - \frac{b}{V}x_2(t). \end{aligned}$$

Este es un sistema de ecuaciones que se puede escribir, en forma matricial, como

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b(1+\lambda)}{V} & \frac{b\lambda}{V} \\ \frac{b(1+\lambda)}{V} & -\frac{b(1+\lambda)}{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\sigma \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se trata de un sistema lineal de dos ecuaciones de primer orden no homogéneo a coeficientes constantes. $\square$

2. Sistemas lineales y ecuaciones de orden superior

2.1. Paso de una ecuación lineal de orden n a un sistema lineal. Veamos cómo una ecuación lineal de orden n puede interpretarse como un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden con n incógnitas.

Para ello, consideremos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Derivando cada nueva variable, se tiene

$$\begin{aligned} z'_1(x) &= y'(x) = z_2(x) \\ z'_2(x) &= y''(x) = z_3(x) \\ &\vdots \\ z'_n(x) &= y^{(n)}(x) = -\bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) - \cdots - \bar{a}_0(x)y(x) + \bar{Q} \\ &= -\bar{a}_{n-1}(x)z_n(x) - \cdots - \bar{a}_0(x)z_1(x) + \bar{Q}. \end{aligned}$$

Con esto, el sistema queda de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_{z'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & \cdots & -\bar{a}_{n-1} \end{pmatrix}}_{A_c} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_z + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{Q} \end{pmatrix}}_b.$$

Las condiciones iniciales $y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ corresponden a las condiciones iniciales en el sistema $z_1(x_0), \dots, z_n(x_0)$. El problema de Cauchy se escribe

$$\begin{cases} z'(x) = A_c(x)z(x) + b(x) & \text{para } x \in I \\ z_k(x_0) = y^{(k-1)}(x_0) & \text{para } k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Llamaremos a $A_c(x)$ la **matriz compañera** de la ecuación de orden n .

2.2. Paso de un sistema lineal a una ecuación lineal de orden n . Veamos ahora la identificación recíproca. Para explicar cómo se hace esta identificación presentaremos dos métodos aplicados a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. El caso general lo dejamos como ejercicio al lector.

Consideremos el sistema

$$(33) \quad x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1$$

$$(34) \quad x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2$$

con las condiciones iniciales $x_1(0) = x_1^0$ y $x_2(0) = x_2^0$.

2.2.1. *Método de sustitución.* Suponiendo $a_{21} \neq 0$, despejamos x_1 de (34) para obtener

$$(35) \quad x_1 = \frac{x_2' - a_{22}x_2 - b_2}{a_{21}}$$

y luego derivamos

$$(36) \quad x_1' = \frac{x_2'' - a_{22}x_2' - b_2'}{a_{21}}.$$

Reemplazando (35) y (36) en (33) resulta

$$x_2'' - (a_{11} + a_{22})x_2' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 + b_2',$$

que es una ecuación de segundo orden con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x_2(0) &= x_2^0 \\ x_2'(0) &= a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + b_2(0). \end{aligned}$$

2.2.2. *Método de reducción.* Utilizando la notación de operador diferencial $Dx = x'$ el sistema (33)-(34) se reescribe

$$(37) \quad (D - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = b_1$$

$$(38) \quad -a_{21}x_1 + (D - a_{22})x_2 = b_2.$$

Aplicando el operador $D - a_{11}$ a la segunda ecuación, multiplicando por a_{21} la primera y sumando, se obtiene

$$(39) \quad (D - a_{11})(D - a_{22})x_2 - a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1 + (D - a_{11})b_2,$$

que es la misma EDO de orden 2 para x_2 que la obtenida con el método anterior.

Observación: Puede verificar que en todos los casos, despejando x_1 o x_2 , se llega a una EDO del tipo

$$x_i'' - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{tr(A)}x_i' + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{det(A)}x_i = f_i, \quad i = 1, 2$$

y con polinomio característico asociado

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = det(A - \lambda I).$$

Se deja al lector comprobar usando el método de reducción que un sistema lineal a coeficientes constantes de tamaño $n \geq 1$ se identifica con una ecuación lineal de orden n cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$.

3. Los teoremas de existencia y unicidad

En esta sección demostraremos la existencia y unicidad de solución para un sistema lineal de ecuaciones de primer orden.

TEOREMA 5.1 (Existencia y Unicidad, caso lineal). *Sea I un intervalo cerrado y acotado. Si $A \in \mathcal{C}(I)^{m \times m}$ y $B \in \mathcal{C}(I)^m$, entonces dados $X_0 \in \mathbb{R}^m$ y $t_0 \in I$, existe una única solución $X \in \mathcal{C}^1(I)^m$ del sistema lineal*

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t), & t \in I \\ X(t_0) &= X_0. \end{cases}$$

Entre las consecuencias más relevantes mencionamos las siguientes:

1. De aquí se obtiene inmediatamente el Teorema 3.1, que da la existencia y unicidad de solución para la EDO lineal de orden n gracias a la identificación presentada en el Capítulo 3.
2. La única solución de un sistema homogéneo con condición inicial nula es la función nula.
3. Si dos soluciones X e Y coinciden en un punto, entonces coinciden en todo el intervalo. Esto dice que los gráficos de dos soluciones distintas no se cruzan, propiedad que se conoce como **determinismo**. Esto se debe a que si $X(t_1) = Y(t_1)$ entonces la diferencia $X - Y$ es solución de un sistema homogéneo con condición inicial nula y por lo tanto $X(t) = Y(t)$ para todo t .
4. Si A o B son continuas por pedazos, el Teorema 5.1 sigue siendo cierto, salvo porque X' es sólo continua por pedazos (se suele decir que X es $\mathcal{C}^1$ por pedazos).
5. El Teorema se generaliza para cualquier tipo de intervalo I . Más aún, si $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R})^{m \times m}$ y $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R})^m$, entonces la solución X queda definida en todo $\mathbb{R}$.

Veremos en realidad la existencia y unicidad de solución en un contexto más amplio que el de los sistemas lineales, en la línea de los teoremas 1.1 y 1.2 (ver Teoremas 5.2 y 5.4).

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times p$, definimos su **norma de Frobenius** como

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Observe que coincide con la definición usual de norma euclídeana para vectores (pensados aquí como matriz fila o columna).

LEMA 5.2. Si $A \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$ y $X \in \mathbb{R}^p$ entonces

$$\|AX\| \leq \|A\| \|X\|.$$

DEMOSTRACIÓN. De la desigualdad de Cauchy-Schwartz vemos que

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^p x_j^2 \right) = \|A\|^2 \|X\|^2.$$

□

Observemos primero que la función

$$F(t, X) = A(t)X + B(t)$$

es **Lipschitz** con respecto a su segunda variable. Es decir, existe $L > 0$ tal que

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq L \|X - Y\|$$

para todo $t \in I$ y para todos los $X, Y \in \mathbb{R}^n$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|F(t, X) - F(t, Y)\| &\leq \|A(t)(X - Y)\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2(t) \right)^{1/2} \|X - Y\|. \end{aligned}$$

Como los coeficientes de A son continuos (o al menos continuos por pedazos), están acotados en I . Luego,

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq L \|X - Y\|, \quad \text{donde} \quad L = \sup_{t \in I} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2(t) \right)^{1/2}.$$

TEOREMA 5.2 (de Cauchy-Lipschitz-Picard, Existencia y Unicidad, caso general). Sea I un intervalo cerrado y acotado. Supongamos que $F \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^m)$ es una función Lipschitz con respecto a la segunda variable. Para cada $t_0 \in I$ y cada $X_0 \in \mathbb{R}^m$, existe una única solución $X \in \mathcal{C}^1(I)^m$ del problema de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) & \text{para todo } t \in I \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

Este resultado generaliza los Teoremas 3.1 y 5.1.

Para la demostración del Teorema 5.2 primero observemos que, integrando entre t_0 y t la ecuación diferencial, obtenemos

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds.$$

Definimos el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &: \mathcal{C}^0(I)^m \rightarrow \mathcal{C}^0(I)^m \\ X &\mapsto \mathcal{T}(X), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{T}(X)$ es la *función* definida por

$$(40) \quad \mathcal{T}(X)(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s))ds \quad \text{para } t \in I.$$

Un **punto fijo** de $\mathcal{T}$ es una función $\overline{X} \in \mathcal{C}^0(I)^m$ tal que $\overline{X} = \mathcal{T}(\overline{X})$. Es decir,

$$\overline{X}(t) = \mathcal{T}(\overline{X})(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, \overline{X}(s))ds$$

para todo $t \in I$. Además, todo punto fijo tiene que ser de clase $\mathcal{C}^1$, por ser primitiva de una función continua. Al derivar tenemos que todo punto fijo de $\mathcal{T}$ es solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) & \text{para todo } t \in I \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

Recíprocamente, toda solución del problema de Cauchy debe ser un punto fijo de $\mathcal{T}$. Por lo tanto, para demostrar el Teorema 5.2 basta verificar que $\mathcal{T}$ tiene un único punto fijo.

3.1. El Teorema del Punto Fijo de Banach. Primero recordemos dos propiedades importantes de $\mathbb{R}$:

1. Una sucesión $\{x_n\}$ es **de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_k| < \varepsilon$ si $k, n \geq N$. En $\mathbb{R}$ *toda sucesión de Cauchy es convergente*. Es decir, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

2. Una función $f : \text{dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ es **contractante** si existe $K \in (0, 1)$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ si $x, y \in \text{dom}(f)$. Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y supongamos que $f : C \rightarrow C$ es contractante. Entonces *f tiene un único punto fijo*.

Veremos que estas dos propiedades también son válidas en el conjunto de las funciones continuas de I en $\mathbb{R}^m$. Comencemos por definir

lo que es una sucesión de Cauchy en este espacio. En primer lugar, la **norma del supremo** de una función $f \in \mathcal{C}^0(I)^m$ es

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} \|f(t)\|.$$

Con esto, decimos que una sucesión de $\{f_n\}$ de funciones en $\mathcal{C}^0(I)^m$ es **de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_k\|_\infty < \varepsilon \quad \text{si} \quad k, n \geq N.$$

Diremos también que una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{C}^0(I)^m$ **converge** a $f \in \mathcal{C}^0(I)^m$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ si $n \geq N$.

TEOREMA 5.3 (Banach). *Sea I un intervalo cerrado y acotado. En el espacio $\mathcal{C}^0(I)^m$ todas las sucesiones de Cauchy son convergentes.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}^0(I)$. Fijamos $t \in I$ y denotamos por $f_n^j(t)$ la j -ésima componente del vector $f_n(t) \in \mathbb{R}^m$. Para cada $j = 1, \dots, m$ la sucesión $\{f_n^j(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ pues

$$|f_n^j(t) - f_k^j(t)| \leq \|f_n(t) - f_k(t)\| \leq \|f_n - f_k\|_\infty$$

y esta última cantidad tiende a cero cuando n y k tienden a infinito. Esto nos dice que la sucesión $f_n^j(t)$ tiene un límite en $\mathbb{R}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Haciendo el mismo procedimiento para cada $t \in I$ y cada $j \in \{1, \dots, m\}$ vamos definiendo una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ cuya j -ésima componente es

$$f^j(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^j(t).$$

Veremos ahora que f_n converge a f en $\mathcal{C}^0(I)^m$. Esto nos dirá automáticamente que f es continua por ser límite *uniforme* de funciones continuas (componente a componente). Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_k\|_\infty < \varepsilon/2$ si $n, k \geq N$. Por lo tanto, para cada $t \in I$ se tiene que

$$\|f_n(t) - f_k(t)\| < \varepsilon/2$$

si $n, k \geq N$. Tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ vemos que

$$\|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Observando que $n \geq N$ no depende de t , tomamos supremo para $t \in I$ y vemos que

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Concluimos que f_n converge a f en $\mathcal{C}^0(I)^m$. □

Decimos que un operador $T : \mathcal{C}^0(I)^m \rightarrow \mathcal{C}^0(I)^m$ es **contractante** si existe $K \in (0, 1)$ tal que $\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq K\|f - g\|_\infty$ para todas $f, g \in \mathcal{C}^0(I)^m$.

COROLARIO 5.1 (Teorema del Punto Fijo de Banach). *Cada operador contractante de $\mathcal{C}^0(I)^m$ en $\mathcal{C}^0(I)^m$ tiene un único punto fijo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T : \mathcal{C}^0(I)^m \rightarrow \mathcal{C}^0(I)^m$ un operador contractante. En primer lugar observemos que T no puede tener más de un punto fijo. En efecto, si $T(g) = g$ y $T(h) = h$ con $g \neq h$, entonces

$$\|g - h\|_\infty = \|T(g) - T(h)\|_\infty \leq K\|g - h\|_\infty < \|g - h\|_\infty,$$

lo cual es imposible. Dicho esto, escojamos cualquier $f \in \mathcal{C}^0(I)^m$ y definamos recursivamente la sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{C}^0(I)^m$ mediante la relación

$$f_0 = f \quad \text{y} \quad f_n = T(f_{n-1}) = \cdots = T^n(f) \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Si $T(f) = f$ ya tenemos el punto fijo. Si no, probaremos que la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy. El Teorema anterior nos dirá entonces que f_n converge a una cierta $\bar{f} \in \mathcal{C}^0(I)^m$ que tiene que satisfacer $T(\bar{f}) = \bar{f}$ pues $f_n = T(f_{n-1})$.

Sean $n, k \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $n \geq k$ y escribimos la diferencia como una suma telescópica:

$$f_n - f_k = \sum_{j=k+1}^n f_j - f_{j-1} = \sum_{j=k+1}^n T^j(f) - T^{j-1}(f).$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \|f_n - f_k\|_\infty &\leq \sum_{j=k+1}^n \|T^j(f) - T^{j-1}(f)\|_\infty \\ &\leq \sum_{j=k+1}^n K^{j-1} \|T(f) - f\|_\infty \\ &\leq \|T(f) - f\|_\infty \frac{K^k - K^n}{1 - K} \\ &\leq \frac{\|T(f) - f\|_\infty}{1 - K} K^k. \end{aligned}$$

Tomemos $\varepsilon > 0$. Dado que $K^k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ (pues $K < 1$), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K^k < \frac{\varepsilon(1-K)}{\|T(f)-f\|_\infty}$ para todo $k \geq N$. Tenemos entonces que $\|f_n - f_k\|_\infty \leq \varepsilon$ si $n, k \geq N$. Al ser una sucesión de Cauchy, el Teorema 5.3 nos dice que es convergente. Como mencionamos arriba, el límite es el único punto fijo de T . $\square$

3.2. Demostración del Teorema 5.2. Recordemos que sólo nos resta probar que el operador $\mathcal{T}$ definido en (40) tiene un único punto fijo. Para ello usaremos el Teorema del Punto Fijo de Banach, pero primero demostraremos un resultado auxiliar:

LEMA 5.3. *Supongamos que para cierto $N \in \mathbb{N}$ el operador*

$$\mathcal{T}^N = \underbrace{\mathcal{T} \circ \cdots \circ \mathcal{T}}_{N \text{ veces}}$$

tiene un único punto fijo. Entonces lo mismo es cierto para $\mathcal{T}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{X}$ el único punto fijo de $\mathcal{T}^N$. Como $\mathcal{T}^N(\bar{X}) = \bar{X}$ tenemos que

$$\mathcal{T}^N(\mathcal{T}(\bar{X})) = \mathcal{T}^{N+1}(\bar{X}) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^N(\bar{X})) = \mathcal{T}(\bar{X}),$$

de donde $\mathcal{T}(\bar{X})$ también es un punto fijo de $\mathcal{T}^N(\bar{X})$. Como $\mathcal{T}^N$ tiene un único punto fijo, tenemos que $\mathcal{T}(\bar{X}) = \bar{X}$ y así $\bar{X}$ es un punto fijo de $\mathcal{T}$. Para ver que es el único, supongamos que $\bar{Y}$ es un punto fijo de $\mathcal{T}$. Entonces $\bar{Y}$ también es punto fijo de $\mathcal{T}^N$ y por lo tanto $\bar{Y} = \bar{X}$. $\square$

El Teorema 5.2 quedará demostrado si encontramos una potencia de $\mathcal{T}$ que sea contractante.

LEMA 5.4. *Bajo las hipótesis del Teorema 5.2, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{T}^N$ es contractante.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $X, Y \in \mathcal{C}^0(I)^m$ y sea L la constante de Lipschitz de la función F con respecto a su segunda variable. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(X)(t) - \mathcal{T}(Y)(t)\| &= \int_{t_0}^t \|F(s, X(s)) - F(s, Y(s))\| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|X(s) - Y(s)\| ds \\ &\leq L(t - t_0) \|X - Y\|_{\infty}. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}^2(X)(t) - \mathcal{T}^2(Y)(t)\| &\leq L \int_{t_0}^t \|\mathcal{T}(X)(s) - \mathcal{T}(Y)(s)\| ds \\ &\leq L^2 \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^s \|X(\sigma) - Y(\sigma)\| d\sigma \right] ds \\ &\leq \frac{L^2(t - t_0)^2}{2} \|X - Y\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Si repetimos este argumento vemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|\mathcal{T}^n(X)(t) - \mathcal{T}^n(Y)(t)\| \leq \frac{(t - t_0)^n L^n}{n!} \|X - Y\|_\infty.$$

Denotamos por M la longitud del intervalo I . Tenemos entonces que

$$\|\mathcal{T}^n(X) - \mathcal{T}^n(Y)\|_\infty \leq \frac{(ML)^n}{n!} \|X - Y\|_\infty.$$

Como $\frac{a^n}{n!}$ tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ para cada $a \in \mathbb{R}$, podemos escoger $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{(ML)^N}{N!} < 1$, de donde $\mathcal{T}^N$ resulta ser contractante. $\square$

Esto termina la demostración del Teorema 5.2. Observemos que, dada la función constante $\tilde{X}(t) \equiv X_0$, la sucesión de funciones $X_n = \mathcal{T}^n(\tilde{X})$ converge a la única solución del problema de Cauchy. Estas funciones se llaman **aproximaciones sucesivas de Picard**.

Algunas observaciones:

1. El Teorema 5.2 es válido para cualquier tipo de intervalo. Observemos además que la solución del problema de Cauchy está definida en todo el intervalo I . Si la función F está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces la solución quedará definida en todo $\mathbb{R}$.
2. El que la función F sea Lipschitz con respecto a su segunda variable es una hipótesis bastante restrictiva, que deja fuera muchos casos interesantes para los cuales también se tiene la existencia y unicidad de solución. En el Capítulo 6 presentaremos una versión local de este teorema, que sólo requiere que la función F sea Lipschitz en un entorno de la condición inicial. El Teorema 5.4 garantiza la existencia y unicidad de solución en las cercanías de t_0 .
3. También se puede demostrar el teorema en el caso en que la función F es sólo continua por pedazos con respecto a su primera variable. Esto se hace resolviendo la ecuación por subintervalos y luego “pegando” las soluciones que se obtienen.

3.3. Existencia y unicidad locales. El Teorema 5.2 exige que la función F sea Lipschitz. Ésta es una hipótesis demasiado restrictiva y el teorema también puede demostrarse bajo una condición más débil. Sin embargo, sólo se puede garantizar la existencia y unicidad de solución en un entorno de la condición inicial. Enunciaremos el Teorema

de Existencia y Unicidad en su versión *local*.

Sean I un intervalo abierto, $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Para $r > 0$ denotamos $B_r(X_0) = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \|Y - X_0\| \leq r\}$. Suponemos que $F : I \times B_r(X_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y que para ciertos $r, \delta > 0$ se tiene

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq L\|X - Y\| \quad \text{si} \quad X, Y \in B_r(X_0) \quad \text{y} \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

El siguiente teorema se refiere al sistema no lineal

$$\begin{cases} X'(t) &= F(t, X(t)), \quad t \in I \\ X(t_0) &= X_0. \end{cases}$$

TEOREMA 5.4 (Existencia y Unicidad, versión local). *Con la notación e hipótesis descritas arriba, definimos*

$$\begin{aligned} M &= \max\{\|F(t, x)\| \mid t \in I, |t - t_0| \leq \delta, \|x - x_0\| \leq r\}, \\ \delta_0 &= \min\left\{\delta, \frac{r}{M}\right\} \\ \text{y} \quad J &= I \cap (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0). \end{aligned}$$

Entonces existe una única solución del problema de Cauchy, al menos en J .

Notemos que basta que la función F sea Lipschitz en la segunda variable sólo *en un entorno* de X_0 . Por otra parte, se garantiza la existencia de solución en el intervalo $I \cap (t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M})$, que incluye puntos que están *suficientemente cerca* de t_0 (ver Ejemplo 5.2).

EJEMPLO 5.2. Un interesante ejemplo en que no se cumple la condición de Lipschitz global (pero sí local) es el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) &= x^2(t) \quad t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

donde $x_0 > 0$. Se trata de una ecuación en variables separables cuya solución viene dada por

$$x(t) = \frac{1}{t_0 + \frac{1}{x_0} - t}.$$

La solución está definida en el intervalo $(-\infty, t_0 + x_0^{-1})$ y explota al acercarse al extremo derecho. Este modelo sirve para modelar una combustión o explosión (observe que mientras más grande x_0 , más rápido se va a ∞ la solución. $\square$)

En ocasiones la función F es diferenciable con respecto a la segunda variable. Esta condición, cuando está presente, puede ser más fácil de verificar que la condición de Lipschitz. Veremos que toda función de clase $\mathcal{C}^1$ es Lipschitz, lo que implica que el teorema anterior también es válido para funciones de este tipo. Es preciso observar, sin embargo, que no toda función Lipschitz es de clase $\mathcal{C}^1$.

PROPOSICIÓN 5.1. *Sea $G : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en un abierto D . Sea C una bola cerrada contenida en D . Si la matrix jacobiana JG es continua en C , entonces G es Lipschitz en C . Es decir, existe $L_C > 0$ tal que $\|G(Y) - G(Z)\| \leq L_C \|Y - Z\|$ si $Y, Z \in C$.*

DEMOSTRACIÓN. Del Teorema del Valor Medio (o de los incrementos finitos) y la continuidad de JG vemos que

$$\begin{aligned} \|G(Z) - G(Y)\| &\leq \sup_{X \in C} \|JG(X)\| \|Z - Y\| \\ &= L_C \|Z - Y\| \quad \text{si } Y, Z \in C. \end{aligned}$$

□

4. Estructura de las soluciones

De manera similar a lo hecho para el estudio de la ecuación lineal de orden n , definiremos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X' = A(t)X, t \in I\}$$

es el espacio de soluciones del sistema homogéneo y

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X' = A(t)X + B(t), t \in I\}$$

es el hiperplano de soluciones del sistema no homogéneo. En efecto, es fácil ver que $\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de I en $\mathbb{R}^n$. En particular, cualquier combinación lineal de elementos de $\mathcal{H}$ está en $\mathcal{H}$. Por otra parte, observemos que la diferencia entre dos soluciones X_1 y X_2 del sistema no homogéneo satisface

$$\begin{aligned} (X_1(t) - X_2(t))' &= X_1'(t) - X_2'(t) \\ &= A(t)X_1(t) + B(t) - A(t)X_2(t) - B(t) \\ &= A(t) [X_1(t) - X_2(t)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, es solución del sistema homogéneo. Esto demuestra el siguiente:

TEOREMA 5.5. *Dada una solución particular X_p de $X' = AX + B$, toda solución del sistema se escribe como suma de X_p y alguna solución del sistema homogéneo. Es decir,*

$$\mathcal{S} = X_p + \mathcal{H}.$$

En lo que sigue fijamos $t_0 \in I$. Del Teorema de Existencia y Unicidad sabemos que, para cualquier condición inicial, el sistema lineal homogéneo tiene una única solución.

Dado $k \in \{1, \dots, n\}$, la k -ésima **solución fundamental canónica**, ϕ_k , es la solución del sistema

$$\begin{cases} \phi'_k(t) = A(t)\phi_k(t), & t \in I \\ \phi_k(t_0) = e_k, \end{cases}$$

donde e_k es el vector que tiene un 1 en la posición k y 0 en las demás. A la matriz cuyas columnas son las soluciones fundamentales canónicas se llamará **matriz fundamental canónica** y se denotará por Φ . Su determinante, $W = \det(\Phi)$, es el **Wronskiano** del sistema.

LEMA 5.5. *Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental canónica del sistema.*

1. Φ es la única función en $\mathcal{C}^1(I)^{n \times n}$ que satisface

$$(41) \quad \Phi(t_0) = I_n \quad y \quad \Phi'(t) = A\Phi(t) \quad \text{para todo } t \in I.$$

2. $\Phi(t)$ es invertible para todo $t \in I$.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que Φ satisface (41). Ahora, si Ψ también cumple (41) entonces para cualquier $Z_0 \in \mathbb{R}^n$ la función

$$Z(t) = [\Phi(t) - \Psi(t)]Z_0$$

verifica

$$\begin{cases} Z'(t) = A(t)Z(t) & \text{para todo } t \in I \\ Z(0) = 0. \end{cases}$$

Por el Teorema de Existencia y Unicidad, $Z(t) = [\Phi(t) - \Psi(t)]Z_0 = 0$ para todo $t \in I$ y para todo $Z_0 \in \mathbb{R}^n$, de donde $\Phi(t) = \Psi(t)$ para todo $t \in I$.

Veremos ahora que $\Psi(t)$ es invertible para todo $t \in I$. Supongamos por el contrario que existe $t_1 \in I$ tal que $\Phi(t_1)$ no es invertible. Entonces existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con $\Phi(t_1)v = 0$. Esto es,

$$\sum_{k=1}^n v_k \phi_k(t_1) = 0.$$

Definimos $\psi(t) = \sum_{k=1}^n v_k \phi_k(t)$. Tenemos que

$$\begin{cases} \psi'(t) = A(t)\psi(t) & \text{para todo } t \in I \\ \psi(t_1) = 0. \end{cases}$$

En virtud del Teorema de Existencia y Unicidad, $\psi(t) = 0$ para todo $t \in I$ y en consecuencia $\Phi(t)v = 0$ para todo $t \in I$. Pero entonces $\Phi(t_0)v = I_n v = v = 0$, lo que contradice el hecho de que $v \neq 0$. $\square$

EJEMPLO 5.3 (Cadena con resortes). Se tiene una cadena con extremos fijos formada por n cuentas conectadas por resortes idénticos de constante elástica k y largo natural l_0 . Cada cuenta de masa m_i , $i = 1 \dots n$, tiene libertad para oscilar horizontalmente, pero presenta un rozamiento lineal con el medio de constante c_i , $i = 1 \dots n$. Para cada cuenta tenemos la ecuación de movimiento

$$m_i x_i'' = -c_i x_i' - k[(x_i - x_{i+1}) + (x_i - x_{i-1})], \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

donde $x_0 = x_{n+1} = 0$. Matricialmente tenemos

$$\begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}'' = - \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' - k \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

El sistema tiene la forma $MX'' + CX' + KX = 0$, con $X \in \mathbb{R}^n$. Si hacemos el cambio de variables

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}, \quad Z' = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix},$$

podemos reescribir el sistema como

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} Z.$$

Para determinar el conjunto de soluciones fundamentales canónicas bastará resolver el sistema anterior con condiciones iniciales

$$Z(t_0) = e_k, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

(Es un sistema de $2n$ ecuaciones). □

TEOREMA 5.6. *El conjunto $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ es una base de $\mathcal{H}$, llamada **base fundamental canónica**. En consecuencia, $\dim(\mathcal{H}) = n$ y la solución del sistema homogéneo*

$$\begin{cases} X_h'(t) &= A(t)X_h(t) & t \in I \\ X_h(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

está dada por

$$X_h = \Phi(t)X_0 = x_0^1 \phi_1(t) + \dots + x_0^n \phi_n(t).$$

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que todo elemento de $\mathcal{H}$ se escribe como combinación lineal de $\phi_1, \dots, \phi_n$ y que estas funciones son linealmente independientes.

Partamos por la primera afirmación. Sea $X_h \in \mathcal{H}$ la solución del sistema homogéneo

$$\begin{cases} X'_h(t) &= A(t)X_h(t), & \text{para } t \in I \\ X_h(t_0) &= X_0. \end{cases}$$

Escibimos $X_0 = x_0^1 e_1 + \dots + x_0^n e_n$ con $x_0^1, \dots, x_0^n \in \mathbb{R}$. Demostraremos que $X_h = x_0^1 \phi_1 + \dots + x_0^n \phi_n$. Para esto definimos

$$Z(t) = x_0^1 \phi_1(t) + \dots + x_0^n \phi_n(t) = \Phi(t)X_0.$$

Derivando obtenemos

$$Z'(t) = x_0^1 \phi'_1(t) + \dots + x_0^n \phi'_n(t),$$

de donde

$$\begin{aligned} Z'(t) &= A(t) [x_0^1 \phi_1(t) + \dots + x_0^n \phi_n(t)] \\ &= A(t)Z(t) \end{aligned}$$

pues $\phi'_k = A\phi_k$ para cada k . Además, por la definición de los ϕ_k tenemos que

$$Z(t_0) = x_0^1 e_1 + \dots + x_0^n e_n = X_0.$$

Tenemos entonces que Z es solución del mismo sistema de ecuaciones diferenciales que X_h , con las mismas condiciones iniciales. En virtud del Teorema de Existencia y Unicidad,

$$X_h(t) = Z(t) = \Phi(t)X_0 \quad \text{para todo } t \in I.$$

Veamos ahora que $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ son linealmente independientes. Suponemos que $\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(t) = 0$ para todo $t \in I$. Debemos probar que, necesariamente, $\alpha_k = 0$ para todo $k = 1, \dots, n$. Observemos primero que

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(t) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \phi_1(t) & \cdots & \phi_n(t) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \Phi(t)\alpha.$$

En virtud del Lema 5.5, la matriz $\Phi(t)$ es invertible para cada t y por lo tanto $\alpha = 0$. $\square$

Para generalizar los resultados anteriores, definamos una matriz fundamental (no necesariamente la canónica) como

$$M(t) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \psi_1(t) & \cdots & \psi_n(t) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

con $t \in I$, donde ψ_k es solución del sistema

$$\begin{cases} \psi'_k(t) = A(t)\psi_k(t) & \text{para } t \in I \\ \psi_k(t_0) = v_k \end{cases}$$

y $\{\psi_k\}_{k=1}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

COROLARIO 5.2. *Sea $M(t)$ una matriz fundamental del sistema. Entonces $\det(M(t)) \neq 0$ para todo $t \in I$ y*

$$X(t) = M(t)M^{-1}(t_0)X_0.$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que la matriz $M(t_0)$ es invertible y satisface $M(t_0)e_k = v_k$ para $k = 1, \dots, n$. Luego $M(t_0)^{-1}v_k = e_k$ para $k = 1, \dots, n$. La matriz

$$\Psi(t) = M(t)M(t_0)^{-1}$$

satisface (41) pues

$$\begin{aligned} \Psi(t_0) &= M(t_0)M(t_0)^{-1} = I_n \\ \Psi'(t) &= M'(t)M(t_0)^{-1} = A(t)M(t)M(t_0)^{-1} = A(t)\Psi(t). \end{aligned}$$

De acuerdo con el Lema 5.5, $\Phi(t) = \Psi(t) = M(t)M(t_0)^{-1}$, de donde se sigue el resultado. $\square$

Para el sistema no homogéneo aplicaremos el método de variación de parámetros estudiado en el capítulo 3 para ecuaciones de orden superior. Recordemos la regla para derivar un producto contenida en el Lema 5.1 y la propiedad de Φ dada por la ecuación (41) en el Lema 5.5. Buscamos una solución particular de la forma

$$X_p(t) = \Phi(t)F(t),$$

donde Φ es la matriz fundamental canónica y F es una incógnita. X_p debe satisfacer

$$\begin{aligned} B(t) &= X'_p(t) - A(t)X_p(t) \\ &= (\Phi(t)F(t))' - A(t)\Phi(t)F(t) \\ &= \Phi'(t)F(t) + \Phi(t)F'(t) - A(t)\Phi(t)F(t) \\ &= \Phi(t)F'(t), \end{aligned}$$

para lo cual basta que

$$\begin{aligned} F'(t) &= \Phi(t)^{-1}B(t) \\ F(t) &= \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds. \end{aligned}$$

Como consecuencia de los Teoremas 5.5 y 5.6 tenemos

TEOREMA 5.7 (Variación de Parámetros). *La solución del sistema*

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

está dada por

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

donde Φ es la matriz fundamental canónica.

EJERCICIO PROPUESTO 5.1. Escriba una fórmula análoga usando cualquier matriz fundamental M .

5. Resolución de sistemas lineales

De acuerdo con lo visto en la sección anterior, la resolución de un sistema lineal, homogéneo o no, se reduce a encontrar la matriz fundamental canónica Φ . En lo que queda de este capítulo nos centraremos en las técnicas para hacerlo.

5.1. Exponencial de una Matriz. Veremos que la matriz fundamental canónica puede encontrarse directamente a partir de la matriz A mediante la llamada fórmula exponencial.

Sea $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. La **exponencial** de M se define como

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + \cdots$$

Las entradas de la matriz e^M están definidas en términos de una serie que, en principio, podría no ser convergente. Veremos que sí lo es. Para $n \in \mathbb{N}$ escribimos

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k.$$

Denotamos por $s_n(i, j)$ la entrada ij de la matriz S_n . Veremos que la sucesión $\{s_n(i, j)\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente para cada i y j . Para ello probaremos que es una sucesión de Cauchy. Observemos primero que si $n \geq m$ entonces

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} M^k.$$

Como $|s_n(i, j) - s_m(i, j)| \leq \|S_n - S_m\|$ y $\|M^n\| \leq \|M\|^n$, se tiene que

$$|s_n(i, j) - s_m(i, j)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|M\|^k.$$

Como la serie del lado derecho es convergente a cero, la sucesión $\{s_n(i, j)\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy. Concluimos que la exponencial de una matriz está bien definida.

Las principales propiedades de la exponencial se resumen en el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 5.2. Sean $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $t, s \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $e^{0 \cdot t} = e^{A \cdot 0} = I$.
2. $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$.
3. $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$. En particular, e^{At} es invertible y su inversa es $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.
4. $AB = BA$ si, y sólo si, $B e^{At} = e^{At} B$.
5. $AB = BA$ si, y sólo si, $e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$.

DEMOSTRACIÓN. La propiedad 1. es inmediata de la definición.

2. En cada intervalo $[-b, b]$, $b \in \mathbb{R}$, las componentes de la matriz At están uniformemente acotadas por $|\max(a_{ij})||b|$, luego tenemos la convergencia uniforme de $h_p(t) = \sum_{k=0}^p \frac{(A^k)_{ij} t^k}{k!}$. Como h_p converge uniformemente a h y la sucesión $h'_p(t) = \sum_{k=1}^p k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}$ converge uniformemente en $(-b, b)$ a $\sum_{k=1}^p k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}$, tenemos que $h(t)$ es derivable y

$$h'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}$$

para todo $t \in (-b, b)$. Pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^{k+1})_{ij} t^k}{k!} = (A^k)_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij} t^k}{k!},$$

de donde

$$\frac{d}{dt}(e^{At})_{ij} = A_{ij}(e^{At})_{ij} \quad \text{para todo} \quad t \in (-b, b).$$

Dado que b era arbitrario, el resultado es válido en todo $\mathbb{R}$.

3. Para s fijo tomamos la función

$$\psi(t) = e^{A(t+s)} - e^{At}e^{As},$$

que satisface

$$\psi'(t) = A\psi(t) \quad \text{y} \quad \psi(0) = 0.$$

Por el Teorema de Existencia y Unicidad ψ es la función nula y así $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$.

4. Por inducción se prueba que $AB = BA$ si, y sólo si, $A^k B = BA^k$ para cada $k \geq 1$. Luego

$$Be^{At} = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{BA^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \cdot B = e^{At}B.$$

5. Se prueba como 3.

□

De las propiedades 1 y 2 y el Lema 5.5 tenemos que

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)} \quad \text{para todo} \quad t \in I$$

pues ambas satisfacen la misma ecuación diferencial. De la fórmula

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

dada por el Teorema 5.7 podemos escribir la solución en términos de la matriz exponencial mediante la **fórmula exponencial**:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}B(s)ds.$$

Una consecuencia importante de esta fórmula es que si X e Y son soluciones de un sistema lineal, entonces

$$\begin{aligned} \|X(t) - Y(t)\| &= e^{A(t-t_0)} \|X(t_0) - Y(t_0)\| \\ &\leq \|e^{A(t-t_0)}\| \|X(t_0) - Y(t_0)\|. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que si las condiciones iniciales están cerca, entonces las soluciones se mantienen cerca durante un tiempo. Más precisamente, dados $\varepsilon, T > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|X_0 - Y_0\| < \delta$ entonces

$\|X(t) - Y(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \in [0, T]$.

5.2. Exponencial de una matriz diagonalizable. Recordemos que una matriz A es diagonalizable si se puede expresar como

$$A = PDP^{-1},$$

donde D es una matriz diagonal que contiene los valores propios de A y P es una matriz invertible cuyas columnas son los vectores propios correspondientes. Más precisamente, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A , y $v_1, \dots, v_n$ sus respectivos vectores propios, entonces

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

El cálculo de la exponencial de una matriz diagonalizable es sumamente sencillo.

$$e^{At} = e^{PDP^{-1}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1})^k t^k}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!} \right) P^{-1} = Pe^{Dt}P^{-1},$$

donde

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

De esta forma la solución del sistema homogéneo se puede escribir como:

$$X_h(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 = Pe^{Dt} \underbrace{e^{-Dt_0} P^{-1} X_0}_C = Pe^{Dt} C,$$

donde $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ es un vector constante que depende de las condiciones iniciales. Desarrollando el producto podemos escribir

$$X_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} v_n.$$

OBSERVACIÓN. Esta última fórmula puede obtenerse fácilmente viendo que cada función de la forma $e^{\lambda t} v$ es solución del sistema lineal siempre que v sea un vector propio asociado al valor propio λ . Como toda matriz diagonalizable de tamaño $n \times n$ tiene n vectores

linealmente independientes, es evidente que las funciones de esta forma generan todo el espacio de soluciones homogéneas. Sin embargo, preferimos construir las soluciones a partir de la exponencial para que el lector se familiarice con este método, imprescindible en el caso no diagonalizable.

EJEMPLO 5.4 (Confort de un auto). Un modelo para estudiar el confort de un auto está dado por

$$x'' = -(k_1 + k_2)x + (k_1L_1 - k_2L_2)\theta$$

$$\theta'' = (k_1L_1 - k_2L_2)x - (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\theta,$$

donde las constantes k_1 , k_2 , L_1 y L_2 son respectivamente las rigideces y las distancias de los amortiguadores traseros y delanteros al centro de masas G del auto. En un instante $t > 0$, $x(t)$ representa la posición vertical de G y $\theta(t)$ el giro del auto en torno a G .

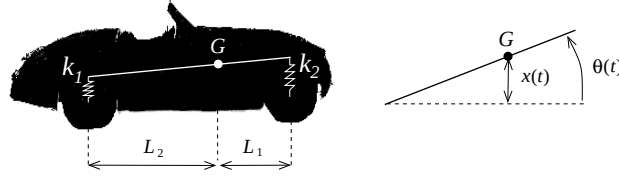


FIGURA 2. Modelamiento de los amortiguadores de un auto del ejemplo 5.4

Este sistema de orden 2, lo llevamos a un sistema lineal tomando la variables: x, θ, x', θ' , resultando:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2) & k_1L_1 - k_2L_2 & 0 & 0 \\ k_1L_1 - k_2L_2 & -(k_1L_1^2 + k_2L_2^2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue supondremos que $k_2 = \mu k_1$ y $L_1 = \mu L_2$, donde $0 < \mu < 1$, pues generalmente el G de los autos está hacia delante del auto, debido al peso del motor. De esta forma se anulan los términos de acoplamiento $k_1L_1 - k_2L_2$. Tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix},$$

donde $a = -(1 + \mu)k_1$ y $b = -\mu(1 + \mu)k_1 L_2^2$. Dado que tenemos la forma $X' = AX$, podemos calcular la exponencial de la matriz. Para esto analicemos cómo son las potencias de A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix};$$

luego, elevando a k ,

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix},$$

y si multiplicamos por A queda

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \\ a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo todas las potencias calculadas, procedemos a determinar la matriz exponencial

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \\ a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si tomamos $a = -\alpha^2$ y $b = -\beta^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha t)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\alpha t) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k t^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta t)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\beta t),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sen}(\alpha t) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\beta} \operatorname{sen}(\beta t).\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & 0 & \frac{1}{\alpha} \operatorname{sen}(\alpha t) & 0 \\ 0 & \cos(\beta t) & 0 & \frac{1}{\beta} \operatorname{sen}(\beta t) \\ -\alpha \operatorname{sen}(\alpha t) & 0 & \cos(\alpha t) & 0 \\ 0 & -\beta \operatorname{sen}(\beta t) & 0 & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Si ponemos alguna condición inicial, como por ejemplo una frenada, representada por

$$x(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad \theta'(0) = -1,$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{sen}(\alpha t)}{\alpha} \\ -\frac{\operatorname{sen}(\beta t)}{\beta} \\ -\cos(\alpha t) \\ -\cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Es decir, la solución del movimiento es:

$$x(t) = \frac{-\operatorname{sen}(\alpha t)}{\alpha}, \quad \theta(t) = \frac{-\operatorname{sen}(\beta t)}{\beta},$$

con $\alpha = \sqrt{(1+\mu)k}$ y $\beta = L\sqrt{\mu(1+\mu)k}$, que físicamente representan las frecuencias de cada modo.

Otro método para solucionar este problema es analizar los valores y vectores propios del sistema.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & b & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - a)(\lambda^2 - b).$$

En términos de las variables antes definidas quedan los valores propios imaginarios puros:

$$\lambda_1 = i\alpha, \quad \lambda_2 = -i\alpha, \quad \lambda_3 = i\beta, \quad \lambda_4 = -i\beta,$$

que tienen asociados respectivamente los vectores propios:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego la solución general será:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix} = c_1 e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-i\alpha t} \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ + c_3 e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sólo nos interesan las variables x y θ :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \frac{(ic_2 e^{-i\alpha t} - ic_1 e^{i\alpha t})}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(ic_4 e^{-i\beta t} - ic_3 e^{i\beta t})}{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aquí se ve que el movimiento del sistema se expresa fundamentalmente sólo como el movimiento vertical de G (representado en el vector $(1, 0)$ y separadamente la rotación del eje que une los resortes, en torno a G , representado en el vector $(0, 1)$, y por tanto la solución general del sistema no es más que la combinación lineal de estos dos movimientos fundamentales llamados modos propios. Los valores propios cuando son imaginarios puros, representan la frecuencia natural de cada modo propio, en este caso al modo de movimiento vertical $(1, 0)$ tiene asociado la frecuencia propia $w = \alpha$. Una aplicación del conocimiento de este valor es que si se deseara tener un fenómeno de resonancia, bastaría aplicar una fuerza externa sinusoidal sobre el auto con esta misma frecuencia ($F = F_0 \sin(\alpha t)$, F_0 constante). La misma interpretación se tiene para

la frecuencia β en el modo $(0, 1)$. Para comprobar que este método entrega la misma solución que la exponencial de la matriz, impongamos las mismas condiciones iniciales, para determinar las constantes:

$$\begin{aligned} -c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_3 + c_4 &= 0 \\ \frac{-i}{\alpha}c_1 + c_2\frac{-i}{\alpha} &= -1 \\ \frac{-i}{\beta}c_3 + c_4\frac{-i}{\beta} &= -1, \end{aligned}$$

de donde se obtiene $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = -\frac{1}{2}$, por tanto:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2}(-e^{-i\alpha t} + e^{i\alpha t}) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}(-e^{-i\beta t} + ie^{i\beta t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix};$$

recordando la identidad $e^{is} - e^{-is} = 2i \operatorname{sen}(s)$, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = -\operatorname{sen}(\alpha t) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \operatorname{sen}(\beta t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix},$$

que es el mismo resultado antes obtenido. $\square$

5.3. Exponencial de una matriz que no es diagonalizable.

Si A es una matriz cuadrada cualquiera (en particular no diagonalizable) siempre existe la descomposición denominada *forma canónica de Jordan*, que estudiaremos a continuación. Sólo enunciaremos los resultados necesarios para construir la forma de Jordan sin entrar en los detalles teóricos, pues involucran técnicas sutiles de álgebra lineal que no viene al caso estudiar en este curso. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, el libro *The Theory of Matrices* de Peter Lancaster.

DEFINICIÓN 5.3. Se llama **bloque de Jordan** de tamaño $k \times k$ y valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ a la matriz $B \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$ dada por

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Se llama **suprabloque de Jordan** de tamaño $m \times m$ y valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ a una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque es un bloque de Jordan de valor propio λ . Una matriz está escrita en **forma canónica de Jordan** si es diagonal por bloques, formada por suprabloques de Jordan.

EJEMPLO 5.5. La siguiente matriz, escrita en la forma canónica de Jordan, está formada por

- un suprabloque de tamaño 2 y valor propio 8, formado a su vez por dos bloques de tamaño 1;
- un suprabloque de tamaño 3 y valor propio 3, formado un bloque de tamaño 1 y otro de tamaño 2; y
- un suprabloque de tamaño 1 y valor propio 4.

$$\begin{pmatrix} \boxed{8} & 0 & & & & \\ 0 & \boxed{8} & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \\ & 0 & 0 & & & \boxed{4} \end{pmatrix}.$$

□

PROPOSICIÓN 5.3. Sea λ valor propio de $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ de multiplicidad algebraica m . Sea $E_s = \ker(A - \lambda I)^s$, $s \in \mathbb{N}$, entonces existe p , $1 \leq p \leq m$, tal que:

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots E_p = E_{p+1} = E_{p+2} = \cdots.$$

Los espacios E_s , $1 \leq s \leq p$, de la Proposición 5.3 se denominan **espacios propios generalizados de A de orden s** asociados al valor propio λ .

Un elemento no nulo v tal que $v \in E_s$ y $v \notin E_{s-1}$ se dice **vector propio generalizado de A de orden s** .

Observación: Con la definición anterior, los vectores propios usuales son vectores propios generalizados de orden 1.

PROPOSICIÓN 5.4. v_s es un vector propio generalizado de A de orden s ($s \geq 2$) asociado a λ si y sólo si $v_{s-1} = (A - \lambda I)v_s$ es un vector propio generalizado de A de orden $s - 1$ asociado a λ .

De la proposición 5.4 tenemos que si tomamos v_s (vector propio generalizado de orden s), entonces v_{s-1} dado por

$$v_{s-1} = (A - \lambda I)v_s \Leftrightarrow Av_s = \lambda v_s + v_{s-1}$$

es un vector propio generalizado de orden $s - 1$, y así recursivamente tenemos definidos:

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ Av_2 &= \lambda v_2 + v_1 \\ Av_3 &= \lambda v_3 + v_2 \\ &\vdots \\ Av_s &= \lambda v_s + v_{s-1}, \end{aligned}$$

donde v_1 es el vector propio usual. Una cadena $v_1, v_2, \dots, v_s$ así construida, se denomina **cadena de Jordan** de largo s , asociada al vector propio v_1 . Cuando es maximal ($s = p$) o si $s < p$, entonces el problema

$$(A - \lambda I)v = v_s$$

no tiene solución con v vector propio generalizado de orden $s + 1$.

PROPOSICIÓN 5.5. *Los elementos de una cadena de Jordan son linealmente independientes.*

PROPOSICIÓN 5.6. *El número k_s de cadenas de Jordan de largo s es*

$$k_s = 2l_s - l_{s-1} - l_{s+1},$$

donde $l_0 = 0$ y $l_s = \dim E_s = \dim \ker(A - \lambda I)^s$ para $s > 0$.

TEOREMA 5.8 (Descomposición de Jordan). *Toda matriz puede expresarse en la forma canónica de Jordan mediante un cambio de base. Más precisamente, dada una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, existen una matriz J en forma de Jordan y una matriz P invertible tales que*

$$A = PJP^{-1}.$$

Además, la matriz J es única, salvo permutaciones de sus bloques.

Observación: Para construir la descomposición se puede proceder de la siguiente manera:

- Se calculan los valores propios de A .
- Se toma un valor propio λ de multiplicidad algebraica m , y se determina la dimensión de los espacios $\ker(A - \lambda I)^s$, aumentando s hasta m .
- Se calculan los k_s , de donde se obtiene un bloque de Jordan de tamaño k_s asociado a cada cadena, y los respectivos valores propios generalizados asociados determinan la matriz P .

EJEMPLO 5.6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son: $\lambda_1 = -1$, con multiplicidad algebraica 1; y $\lambda_2 = 1$, con multiplicidad algebraica 4. La matriz J estará formada por dos suprabloques, uno asociado a cada valor propio.

Como λ_1 tiene multiplicidad 1, sólo le corresponderá un bloque de Jordan de tamaño 1. Tomamos como vector propio asociado $(0, 1, 1, 0, 0)$.

Para λ_2 calculamos:

$$\begin{aligned} l_1 &= \dim \ker(A - I) = 2 \\ l_2 &= \dim \ker(A - I)^2 = 4 \\ l_s &= \dim \ker(A - I)^s = 4, \forall s \geq 2. \end{aligned}$$

Como $l_0 = 0$, tenemos que $k_1 = 0$ y $k_2 = 2$. En virtud de la Proposición 5.6 no hay cadenas de largo 1, pero hay 2 cadenas de largo 2. Cada cadena de largo 2 determina un bloque de 2×2 , por lo que tenemos completamente determinada la matriz J :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Buscamos ahora los vectores propios generalizados. Para λ_2 tenemos

$$\begin{aligned} (A - I)v_1 &= 0 \Rightarrow v_1 = (\alpha, \alpha, 0, \beta, \beta) \\ (A - I)v_2 &= v_1 \Rightarrow v_2 = (\beta + \gamma, \gamma, \alpha, \alpha + \delta, \delta). \end{aligned}$$

Si $\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow v_1 = (0, 0, 0, 1, 1) \Rightarrow v_2 = (1 + \gamma, \gamma, 0, \delta, \delta)$. Si $\gamma = \delta = 0 \Rightarrow v_2 = (1, 0, 0, 0, 0)$.

Si $\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow v_1 = (1, 1, 0, 0, 0) \Rightarrow v_2 = (\gamma, \gamma, 1, 1 + \delta, \delta)$. Si $\gamma = \delta = 0 \Rightarrow v_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$.

La matriz P de cambio de base tiene por columnas los vectores propios

generalizados:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Para el cálculo de e^{At} en el caso general veamos la siguiente propiedad:

PROPOSICIÓN 5.7. *Sea*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix},$$

una matriz diagonal por bloques. Entonces

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{M_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{M_n} \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que las matrices por bloques se pueden multiplicar como si los bloques fueran escalares:

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, por inducción,

$$M^k = \begin{pmatrix} M_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^k \end{pmatrix}$$

y de allí concluimos que

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{M_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{M_n} \end{pmatrix}.$$

□

Calculemos ahora la exponencial de un bloque de Jordan de tamaño m :

$$e^{Jt} = e^{(\lambda I + N)t}, \quad \text{donde} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente λI y N conmutan. Luego

$$e^{Jt} = e^{\lambda It + Nt} = e^{\lambda It} e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt}$$

por la propiedad 5 de la Proposición 5.2 Sólo nos resta calcular e^{Nt} . Para esto veamos las potencias de N :

$$\begin{aligned} N^0 &= I \\ N^1 &= N \\ N^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así sucesivamente la línea de unos va alejándose de la diagonal principal. Al final va quedando

$$N^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^m = 0_{m \times m},$$

donde $0_{m \times m}$ denota la matriz nula de tamaño $m \times m$. Vemos entonces que N es una matriz nilpotente de orden m , y la exponencial se escribe como una suma finita

$$\begin{aligned} e^{Nt} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N^k t^k}{k!} \\ &= I + tN + \frac{t^2}{2!} N^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N^{m-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En conclusión, e^{Nt} es una matriz triangular superior de la forma

$$[e^{Nt}]_{ij} = \begin{cases} \frac{t^k}{k!} & \text{si } j - i = k \geq 0 \\ 0 & \text{si } j - i < 0 \end{cases}.$$

Finalmente,

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma hemos demostrado el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 5.8. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, y sea $A = PJP^{-1}$ su representación en forma canónica de Jordan. Entonces

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{J_n t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

EJEMPLO 5.7. Consideremos el sistema:

$$X' = AX,$$

con condición inicial $X(0) = X_0$, donde la matriz A está dada en el Ejemplo 5.6. Ya habíamos calculado su forma canónica de Jordan. En virtud de la proposición anterior se tiene que la solución es:

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} X_0,$$

donde P es la matriz de cambio de base descrita en el Ejemplo 5.6. $\square$

En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación de la forma canónica de Jordan a un sistema dinámico discreto.

EJEMPLO 5.8 (Equilibrio Marino). Suponga que la población de ballenas b , plancton p y la temperatura del mar T están regidas por el siguiente sistema discreto, donde n designa el año y $\lambda > 0$ es un parámetro de crecimiento:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \lambda b_n + p_n \\ p_{n+1} &= \lambda p_n + T_n \\ T_{n+1} &= \lambda T_n, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales b_0, p_0, T_0 positivas.

Se quiere saber cómo evoluciona este sistema en el tiempo, dependiendo del parámetro λ . El sistema anterior se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ p_{n+1} \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ p_n \\ T_n \end{pmatrix}, \quad \text{con condición inicial} \begin{pmatrix} b_0 \\ p_0 \\ T_0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos primero un caso más general de sistemas discretos:

$$X_{n+1} = AX_n + B_n, \quad n \geq 0,$$

con condición inicial $X_0 \in \mathbb{R}^d$, donde $A \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$, $B_n \in \mathbb{R}^d$, $n \geq 0$. Como X_0 es la condición inicial, iterando tenemos:

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0 + B_0 \\ X_2 &= AX_1 + B_1 = A(AX_0 + B_0) + B_1 = A^2X_0 + AB_0 + B_1 \\ X_3 &= AX_2 + B_2 = A^3X_0 + A^2B_0 + AB_1 + B_2 \\ &\vdots \\ X_n &= A^nX_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1}. \end{aligned}$$

Probemos por inducción que efectivamente la solución del sistema está dada por:

$$X_n = A^nX_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1}, \quad n \geq 1$$

Para $n = 1$ resulta

$$X_1 = AX_0 + B_0,$$

que es solución del sistema. Suponemos ahora que $X_n = A^nX_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1}$ satisface el sistema propuesto. Hay que probar que

$$X_{n+1} = A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} A^{n+1-j}B_{j-1}$$

también lo satisface. En efecto,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} A^{n+1-j}B_{j-1} \\ &= A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^n A^{n+1-j}B_{j-1} + A^{n+1-(n+1)}B_{(n+1)-1} \\ &= A^{n+1}X_0 + A \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1} + I_{d \times d}B_n \\ &= A \left(A^nX_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1} \right) + B_n \\ &= AX_n + B_n. \end{aligned}$$

Estudiemos ahora la solución del sistema discreto homogéneo, para el caso en que A sea diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$, con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix}, \text{ donde } \lambda_1, \dots, \lambda_d \text{ son los valores propios de } A.$$

Según lo anterior, la solución de este sistema será: $X_n = A^n X_0$, pero $A^n = PD^nP^{-1}$, entonces:

$$X_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_d^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

De esta forma si queremos que nuestro problema tenga solución, es decir que exista $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, debemos imponer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^n$ exista $\forall k = 1, \dots, d$, lo que equivale a pedir que $|\lambda_k| < 1$ ó $\lambda_k = 1$, $\forall k = 1, \dots, d$.

Si volvemos al problema específico de las ballenas, estamos en el caso de un sistema homogéneo discreto, pero donde la matriz A no es diagonalizable (tiene la forma de un bloque de Jordan). Sin embargo, sigue siendo válida la solución $X_n = A^n X_0$. Sólo resta calcular A^n . Para esto usaremos la siguiente propiedad:

$$AB = BA \Rightarrow (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}, \forall n \geq 0,$$

es decir, si la matrices conmutan, se tiene la propiedad del Binomio de Newton, (la demostración puede hacerse por inducción, al igual que en el caso escalar). En este caso podemos usar esta fórmula, pues claramente

$$\lambda I_d N = \lambda N = N \lambda = N \lambda I_d.$$

Luego:

$$A^n = (\lambda I_d + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k I^k N^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k},$$

con N una matriz nilpotente de orden 3, pero $N^{n-k} = 0$ cuando $n-k \geq 3 \Rightarrow n-3 \geq k$, luego la suma sin los términos nulos queda:

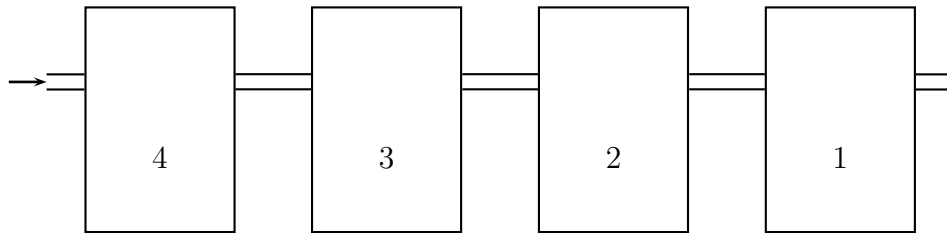
$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=n-2}^n \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k} \\ &= \binom{n}{n-2} \lambda^{n-2} N^2 + \binom{n}{n-1} \lambda^{n-1} N + \binom{n}{n} \lambda^n I \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2 + n \lambda^{n-1} N + \lambda^n I. \end{aligned}$$

En el desarrollo sobre las formas de Jordan, habíamos calculado todas las potencias de una matriz nilpotente, resulta entonces:

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2 + n \lambda^{n-1} N + \binom{n}{n} \lambda^n I \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^n I \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & n \lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma vemos que se repite la solución que teníamos para el caso diagonalizable: independiente de la condiciones iniciales, nuestro modelo indica que cuando $n \rightarrow \infty$, si $|\lambda| > 1$, el sistema diverge, es decir las poblaciones de ballenas y plancton se expanden indefinidamente, al igual que la temperatura, mientras que si $|\lambda| < 1$, las poblaciones se extinguen y la temperatura del mar descende a 0. En el caso crítico $|\lambda| = 1$ se tiene que las poblaciones animales divergen, pero con temperatura constante del mar T_0 . $\square$

EJEMPLO 5.9. Supongamos que se tienen 4 estanques conectados por tuberías, como se muestra en la figura.



En el estanque j , que tiene volumen V_j , hay una cantidad C_j de una sustancia en solución. Por todas las tuberías corre un flujo F de solución. La solución que entra al estanque 4 tiene una concentración m_0 . Esto nos da el siguiente sistema para las cantidades $C_1, \dots, C_4$:

$$\begin{cases} C_1' &= -K_1 C_1 + K_2 C_2 \\ C_2' &= -K_2 C_2 + K_3 C_3 \\ C_3' &= -K_3 C_3 + K_4 C_4 \\ C_4' &= -K_4 C_4 + m_0 F, \end{cases}$$

donde $K_j = F/V_j$. Escrito en forma matricial esto es

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -K_1 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_0 F \end{pmatrix}.$$

Nos queda una matriz triangular superior. Si todos los estanques tienen distinto volumen, la matriz es diagonalizable pues tiene 4 valores propios distintos. Si por el contrario, todos los estanques el mismo volumen V , escribimos $K = F/V$ y el sistema se reduce a

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}' = K \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_0 F \end{pmatrix}.$$

Si denotamos

$$A = K \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^{At} = e^{-Kt} \begin{pmatrix} 1 & Kt & \frac{1}{2}K^2t^2 & \frac{1}{6}K^3t^3 \\ 0 & 1 & Kt & \frac{1}{2}K^2t^2 \\ 0 & 0 & 1 & Kt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se deja al lector escribir la solución general usando la fórmula de variación de parámetros y analizar los casos en que hay algún volumen (y por lo tanto algún valor propio) repetido. $\square$

5.4. Sistemas lineales y transformada de Laplace. También es posible resolver sistemas lineales usando la transformada de Laplace. Para comenzar con un ejemplo simple, consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{cases}$$

Si queremos encontrar soluciones definidas para $t > 0$ podemos intentar aplicar la transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones. Obtenemos

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}x_1 - x_1^0 &= a_{11}\mathcal{L}x_1 + a_{12}\mathcal{L}x_2 + \mathcal{L}b_1 \\ s\mathcal{L}x_2 - x_2^0 &= a_{21}\mathcal{L}x_1 + a_{22}\mathcal{L}x_2 + \mathcal{L}b_2, \end{aligned}$$

donde $x_1^0 = x_1(0)$ y $x_2^0 = x_2(0)$. Así tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} (s - a_{11})\mathcal{L}x_1 - a_{12}\mathcal{L}x_2 &= \mathcal{L}b_1 + x_1^0 \\ -a_{21}\mathcal{L}x_1 + (s - a_{22})\mathcal{L}x_2 &= \mathcal{L}b_2 + x_2^0. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por $s - a_{22}$ y la segunda por a_{12} podemos reducir $\mathcal{L}x_2$ y obtener

$$P(s)\mathcal{L}(x_1) = \phi(s),$$

donde

$$\begin{aligned} P(s) &= (s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ \phi(s) &= (s - a_{22})(\mathcal{L}b_1 + x_1^0) + a_{12}(\mathcal{L}b_2 + x_2^0). \end{aligned}$$

Despejando obtenemos expresiones para $\mathcal{L}x_1$ y $\mathcal{L}x_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x_1 &= \frac{(s - a_{22})(\mathcal{L}b_1 + x_1^0) + a_{12}(\mathcal{L}b_2 + x_2^0)}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \mathcal{L}x_2 &= \frac{(s - a_{11})(\mathcal{L}b_2 + x_2^0) + a_{21}(\mathcal{L}b_1 + x_1^0)}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.10 (Polución en dos estanques, continuación). Si reemplazamos los valores que teníamos en el sistema de los estanques en el Ejemplo 5.1 obtenemos

$$\left[s^2 + \frac{2b(1+\lambda)}{V}s + \frac{b^2(1+\lambda)}{V^2} \right] \mathcal{L}x_1 = \left[s + \frac{b(1+\lambda)}{V} \right] \left[\frac{b\sigma}{s} + x_1^0 \right] + \frac{bx_2^0\lambda}{V}.$$

Resolvamos la ecuación cuadrática del lado izquierdo:

$$s = \frac{-b(1+\lambda)}{V} \pm \underbrace{\frac{b(1+\lambda)}{V} \sqrt{1 - \frac{1}{1+\lambda}}}_{\theta}.$$

Si $\lambda \geq 0$ entonces $\theta \in [0, 1]$ y

$$s_1 = \frac{-b(1+\lambda)}{V}(1+\theta) < 0 \quad \text{y} \quad s_2 = \frac{-b(1+\lambda)}{V}(1-\theta) < 0.$$

Si introducimos los parámetros

$$\alpha = \frac{b(1+\lambda)}{V}, \quad \beta = \frac{b\lambda}{V},$$

vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x_1 &= \frac{b\sigma + \alpha x_1^0 + \beta x_2^0}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} + \frac{sx_1^0}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} \\ &\quad + \frac{\alpha b\sigma}{s(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} \\ \mathcal{L}x_2 &= \frac{\alpha(x_1^0 + x_2^0)}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} + \frac{sx_2^0}{(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))} \\ &\quad + \frac{\alpha b\sigma}{s(s + \alpha(1+\theta))(s + \alpha(1-\theta))}. \end{aligned}$$

Los tres sumandos de cada ecuación anterior tienen una antitransformada conocida:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-a)(s-b)} \right] &= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s-a)(s-b)} \right] &= \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b} \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)} \right] &= \frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -(b\sigma + \alpha x_1^0 + \beta x_2^0) \frac{e^{-\alpha(1+\theta)t} - e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\alpha\theta} \\ &\quad + x_1^0 \frac{(1+\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1-\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\theta} \\ &\quad + \alpha b\sigma \frac{(1-\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1+\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t} + 2\theta}{2\alpha^2\theta(1-\theta^2)} \\ x_2 &= -\alpha(x_1^0 + x_2^0) \frac{e^{-\alpha(1+\theta)t} - e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\alpha\theta} \\ &\quad + x_2^0 \frac{(1+\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1-\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\theta} \\ &\quad + \alpha b\sigma \frac{(1-\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1+\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t} + 2\theta}{2\alpha^2\theta(1-\theta^2)}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}x_1 &= C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_1 t} + C_3 \\x_2 &= \tilde{C}_1 e^{s_1 t} + \tilde{C}_2 e^{s_1 t} + \tilde{C}_3,\end{aligned}$$

donde $C_1, \tilde{C}_1, C_2, \tilde{C}_2, C_3, \tilde{C}_3$ son constantes dadas de la agrupación de términos semejantes en las expresiones anteriores, y que dependen sólo de las condiciones iniciales y de la geometría del sistema.

Es importante notar que cuando $t \rightarrow \infty$ las soluciones convergen a un *estado estacionario*, que es una solución constante. En efecto, dado que $s_1, s_2 < 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) &= C_3 = \frac{b\sigma}{\alpha(1-\theta^2)} = \sigma V \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) &= \tilde{C}_3 = \frac{b\sigma}{\alpha(1-\theta^2)} = \sigma V.\end{aligned}$$

Después de un tiempo suficientemente largo, la cantidad de poluente en cada estanque será muy cercana a σV , independientemente del valor de λ . Tenemos la misma solución que si $\lambda = 0$, que era como inicialmente estaba el sistema de estanques. En realidad la situación es más compleja, ya que graficando las soluciones para $\lambda > 0$ y $\lambda = 0$ se aprecia que la polución es menor en el caso $\lambda > 0$ para un intervalo de t considerable (aunque el límite es el mismo). Ver Figura 3.

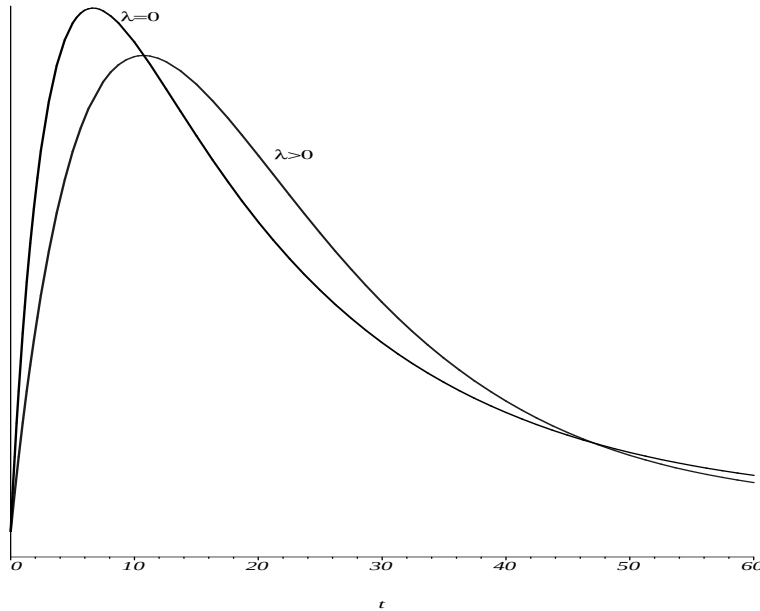


FIGURA 3. Comportamiento de la polución en estanque 2 del ejemplo 5.10

□

Veamos ahora el método de la Transformada de Laplace en caso de un sistema lineal general *a coeficientes constantes*:

$$(42) \quad \begin{cases} X'(t) = AX(t) + B(t), & \text{con } B, X \in \mathbb{R}^n, A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ X(0) = X_0, & \text{con } X_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La i -ésima fila del sistema es

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad x_i(0) = x_i^0.$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}x_i - x_i^0 &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathcal{L}x_j + \mathcal{L}b_i, & i = 1, \dots, n \\ s\mathcal{L}x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathcal{L}x_j &= \mathcal{L}b_i - x_i^0, & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Escrito en forma matricial esto es

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}X(s) - A\mathcal{L}X(s) &= \mathcal{L}B(s) + X_0 \\ (sI - A)\mathcal{L}(X)(s) &= \mathcal{L}B(s) + X_0. \end{aligned}$$

Sea M el máximo de las partes reales de los valores propios de A . Si $s > M$ entonces la matriz $(sI - A)$ es invertible y podemos despejar $\mathcal{L}(X)$.

TEOREMA 5.9. *La solución del sistema lineal (42) satisface*

$$\mathcal{L}(X)(s) = (sI - A)^{-1}(\mathcal{L}(B)(s) + X_0), \quad s > M.$$

EJEMPLO 5.11 (Masas atmosféricas). El siguiente es un modelo para la evolución de las masas atmosféricas en kilotoneladas [kton] de un contaminante en el hemisferio norte (c_1) y el hemisferio sur (c_2) de la Tierra (ver figura 5.11):

$$(43) \quad \begin{cases} c'_1 = f_1 - \alpha(c_1 - c_2) - \beta c_1 \\ c'_2 = f_2 - \alpha(c_2 - c_1) - \beta c_2. \end{cases}$$

La constante $\alpha > 0$ representa inverso del tiempo de intercambio interhemisférico en [1/año] y la constante $\beta > 0$ (desconocida) el inverso del tiempo de vida química del contaminante en [1/año]. Las emisiones del contaminante en cada hemisferio son constantes conocidas $f_1 = 30$ y $f_2 = 10$ en [kton/año]. Inicialmente $c_1^0 = 84$ y $c_2^0 = 60$ en [kton].

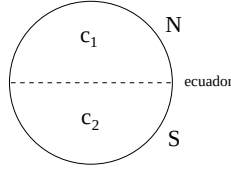


FIGURA 4. Masas atmosféricas del Ejemplo 5.11

Introduzcamos la masa media entre los dos hemisferios como $\bar{c}(t) = \frac{1}{2}(c_1(t) + c_2(t))$ y la emisión media como $\bar{f} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. Si derivamos la expresión de la masa media con respecto al tiempo obtenemos

$$\bar{c}'(t) = \frac{1}{2}(c_1'(t) + c_2'(t)).$$

Luego, si sumamos las EDO que tenemos para c_1 y c_2 , nos queda

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' &= 2\bar{c}' = (f_1 + f_2) - \alpha(c_1 - c_2 + c_2 - c_1) - \beta(c_1 + c_2) \\ \bar{c}' &= \bar{f} - \beta\bar{c} \end{aligned}$$

que es una EDO lineal de primer orden para $\bar{c}$. La condición inicial está dada por

$$\bar{c}(0) = \frac{1}{2}(c_1(0) + c_2(0)) = \frac{1}{2}(84 + 60)[kton] = 72[kton].$$

La solución del problema de Cauchy asociado es

$$\bar{c}(t) = 72e^{-\beta t} + \frac{\bar{f}}{\beta}(1 - e^{-\beta t}).$$

Se estima que el límite de $\bar{c}(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$ es de 100 [kton]. De allí podemos encontrar una estimación para el tiempo de vida del contaminante

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{c}(t) = 100[kton] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[72e^{-\beta t} + \frac{\bar{f}}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) \right] = \frac{\bar{f}}{\beta}.$$

Como $\bar{f} = 20$ [kton/año], tenemos que

$$\beta^{-1} = \frac{100[kton]}{20[kton/año]} = 5 \text{ [años]}.$$

El tiempo estimado de vida del contaminante es de 5 años.

Resolveremos ahora el sistema (43) utilizando la transformada de Laplace. Primero escribimos el sistema en forma matricial como $C' =$

$AC + B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \alpha \\ \alpha & -\alpha - \beta \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

El Teorema 5.9 nos dice que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X)(s) &= (sI - A)^{-1}(\mathcal{L}B(s) + X_0) \\ &= \begin{pmatrix} s + \alpha + \beta & -\alpha \\ -\alpha & s + \alpha + \beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{f_1}{s} + c_1^0 \\ \frac{f_2}{s} + c_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_1\phi_1(s) + k_2\phi_2(s) + k_3\phi_3(s) \\ \tilde{k}_1\phi_1(s) + \tilde{k}_2\phi_2(s) + \tilde{k}_3\phi_3(s) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f_1 + c_2^0\alpha + c_1^0\alpha + c_1^0\beta & \tilde{k}_1 &= f_2 + c_1^0\alpha + c_2^0\alpha + c_2^0\beta \\ k_2 &= c_1^0 & \tilde{k}_2 &= c_2^0 \\ k_3 &= f_1\alpha + f_1\beta + f_2\alpha & \tilde{k}_3 &= f_2\alpha + f_2\beta + f_1\alpha \end{aligned}$$

son constantes conocidas y

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= \frac{1}{(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} \\ \phi_2(s) &= \frac{s}{(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} \\ \phi_3(s) &= \frac{1}{s(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

son funciones cuyas antitransformadas debemos encontrar para determinar el vector X . Para ello vamos a descomponerlas en fracciones parciales.

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= \frac{1}{(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} \\ &= \frac{1}{2\alpha(s + \beta)} - \frac{1}{2\alpha(s + 2\alpha + \beta)}, \\ \phi_2(s) &= \frac{s}{(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} \\ &= \frac{s}{2\alpha(s + \beta)} - \frac{s}{2\alpha(s + 2\alpha + \beta)}, \\ \phi_3(s) &= \frac{1}{s(s + \beta)(s + 2\alpha + \beta)} \\ &= \frac{1}{\beta(2\alpha + \beta)s} - \frac{1}{(2\alpha\beta)(s + \beta)} + \frac{1}{2\alpha(2\alpha + \beta)(s + 2\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Recordando que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \right] (t) = e^{-at} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s+a} \right] (t) = \delta(t) - ae^{-at},$$

vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} [\phi_1(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2\alpha(s+\beta)} - \frac{1}{2\alpha(s+2\alpha+\beta)} \right] \\ &= \frac{1}{2\alpha} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+\beta} \right] - \frac{1}{2\alpha} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2\alpha+\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2\alpha} e^{-\beta t} - \frac{1}{2\alpha} e^{-(2\alpha+\beta)t}, \\ \mathcal{L}^{-1} [\phi_2(s)] &= \frac{1}{2\alpha} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s+\beta} \right] - \frac{1}{2\alpha} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s+2\alpha+\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2\alpha} (\delta(t) - \beta e^{-\beta t} - \delta(t) + (2\alpha+\beta) e^{-(2\alpha+\beta)t}) \\ &= \frac{1}{2\alpha} ((2\alpha+\beta) e^{-(2\alpha+\beta)t} - \beta e^{-\beta t}), \\ \mathcal{L}^{-1} [\phi_3(s)] &= \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \frac{1}{2\alpha\beta} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+\beta} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2\alpha+\beta} \right] \\ &= \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)} - \frac{1}{2\alpha\beta} e^{-\beta t} + \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)} e^{-(2\alpha+\beta)t}. \end{aligned}$$

Finalmente, agrupando constantes, la cantidad de contaminante en cada hemisferio resulta:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= p_1 e^{-\beta t} + q_1 e^{-(2\alpha+\beta)t} + r_1 \\ c_2(t) &= p_2 e^{-\beta t} + q_2 e^{-(2\alpha+\beta)t} + r_2, \end{aligned}$$

donde p_1 , q_1 , r_1 , p_2 , q_2 y r_2 , son constantes que dependen sólo de c_1^0 , c_2^0 , f_1 , f_2 , α y β .

Es interesante notar que después de un tiempo suficientemente largo, se llega a un equilibrio en las cantidades de contaminación. Para el hemisferio Norte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t) = r_1 = \frac{(\alpha+\beta)f_1 + \alpha f_2}{\beta(2\alpha+\beta)}$$

y para el hemisferio Sur

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = r_2 = \frac{\alpha f_1 + (\alpha + \beta) f_2}{\beta(2\alpha + \beta)}.$$

□

Capítulo 6

Análisis cualitativo de sistemas no lineales

Muchos fenómenos de la naturaleza se comportan de forma un poco más complicada que un sistema de ecuaciones lineales. Por ejemplo, se suele utilizar la aproximación de la Ley de Hooke $F = -kx$ para modelar resortes, aunque en realidad esta fuerza suele tener otras componentes de orden no lineal, pero que habitualmente son despreciables. En general estas ecuaciones presentan grandes desafíos, pues es bastante complicado encontrarles soluciones explícitas. Sin embargo, muchas veces se puede hacer un estudio cualitativo de las soluciones, que nos indique sobre el comportamiento general del sistema no lineal.

Dados un intervalo abierto I y una función $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con condición inicial $X_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t_0 \in I$:

$$\begin{cases} X'(t) &= F(t, X(t)), \quad t \in I \\ X(t_0) &= X_0. \end{cases}$$

Si la función F no es lineal con respecto a la variable X , se dirá que es un **sistema no lineal** (*SNL*). Si además F no depende explícitamente de la variable t , se dirá que es un **sistema no lineal autónomo** (*SNLA*). Generalmente un (*SNLA*) corresponde en el caso mecánico a un movimiento sin forzamiento externo. Estos sistemas son invariantes bajo traslaciones temporales (variable t). En particular, si $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución del sistema entonces la función $X_c : I_c \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $X_c(t) = X(t - c)$ también lo es. Aquí I_c denota el intervalo I desplazado hacia la derecha en c .

El vector $X(t) \in \mathbb{R}^n$, que es la solución del sistema en un punto $t \in I$, se llama **vector de estado**.

OBSERVACIÓN. Dada una función $h : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, toda ecuación de orden superior de la forma

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) &= y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

se puede llevar, mediante un cambio de variables, a la forma (SNL). Claramente, si h no depende explícitamente de t , se puede llevar a la forma (SNLA).

EJEMPLO 6.1 (El péndulo simple amortiguado). Un péndulo simple sometido a un ambiente con roce (por ejemplo aire, agua, aceite, etc.) y a una fuerza externa, queda descrito por la siguiente ecuación de movimiento de segundo orden:

$$\begin{aligned} m\theta'' + c\theta' + \frac{mg}{L}\sin(\theta) &= f(t) \\ \theta(0) &= \theta_0 \\ \theta'(0) &= \theta'_0, \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo que forma el péndulo con respecto a la vertical y c el coeficiente de roce, producto de una fuerza de roce viscoso lineal: $\vec{F}_{roce} = -c\vec{v}$, donde $v = L\theta'$. Haciendo el cambio de variables: $x = \theta$, $y = \theta'$, la ecuación anterior toma la forma de (SNL):

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x) + f(t). \end{aligned}$$

La no linealidad se aprecia claramente en el término $\sin(\theta)$ pues

$$\sin(\lambda\theta_1 + \theta_2) \neq \lambda\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2).$$

El (SNLA) del péndulo corresponde al caso en que no hay forzamiento externo:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x). \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 6.2 (Atractor de Lorenz). El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales fue un modelo desarrollado por Lorenz, que en principio se proponía tratar de comprender los fenómenos meteorológicos. El modelo que utilizó Lorenz consiste en una atmósfera bidimensional rectangular, cuyo extremo inferior está a una temperatura mayor que el superior. De esta manera el aire caliente subirá y el aire frío bajará creándose corrientes que harán un intercambio de calor por convección. Las ecuaciones que describen este proceso son:

$$\begin{cases} x' = s(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz, \end{cases}$$

donde x que representa el flujo convectivo; y , la distribución horizontal de temperaturas; y z la distribución vertical de temperaturas. Además, tenemos tres parámetros que intervienen en las ecuaciones: s es el cociente entre la viscosidad y la conductividad térmica; r , la diferencia de temperaturas entre la capas inferior y superior; y b el cociente entre la altura y el ancho del rectángulo. Este es un modelo muy importante que tiene muchas propiedades interesantes, pero por ahora sólo notamos que es un sistema autónomo, pero no lineal, pues aparecen los términos xy y xz . $\square$

1. Sistemas no lineales y sistemas linealizados

De aquí en adelante nos restringiremos a problemas en dos dimensiones y autónomos de la forma (SNLA):

$$\begin{cases} x' = F(x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y' = G(x, y), & y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

con F y G funciones continuamente diferenciables. El Teorema 5.4 garantiza que siempre tendremos una única solución local.

Decimos que $(\bar{x}, \bar{y})$ es un **punto crítico** o **de equilibrio** del (SNLA) si

$$\begin{cases} F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ G(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \end{cases}$$

Se llama **nulclina en x** a la curva definida por $F(x, y) = 0$ y **nulclina en y** a la curva definida por $G(x, y) = 0$.

Los puntos críticos son las intersecciones de las nulclinas. El conjunto de puntos críticos del sistema se denota por

$$\mathcal{C} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

Si hacemos una expansión de Taylor en el (SNLA) en torno a un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$, resulta:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + h_F(r) \\ G(x, y) &= \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + h_G(r), \end{aligned}$$

donde $r = (x, y) - (\bar{x}, \bar{y})$ (recordemos que $F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0$). Además

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_F(r)}{\|r\|} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_G(r)}{\|r\|} = 0.$$

Para simplificar la notación definimos

$$a = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}), \quad c = \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{y} \quad d = \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y});$$

constantes que dependen del punto crítico. Notamos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = J(\bar{x}, \bar{y}),$$

donde J es la matriz Jacobiana de la función

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}$$

evaluada en el punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$.

Ahora, si reemplazamos en $(SNLA)$ queda:

$$(SNLA) \quad \begin{cases} x' = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) + h_F(r) \\ y' = c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}) + h_G(r). \end{cases}$$

Consideramos el **sistema linealizado**

$$(SL) \quad \begin{cases} x' = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) \\ y' = c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}). \end{cases}$$

Un sistema $(SNLA)$ es **degenerado** en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$ si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$. Un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ de $(SNLA)$ es **aislado** si existe $\delta > 0$ tal no hay ningún otro punto crítico en la bola de centro $(\bar{x}, \bar{y})$ y radio δ . De lo contrario se dice que los puntos críticos son **densos en torno a** $(\bar{x}, \bar{y})$.

PROPIEDADES 6.1. Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico de $(SNLA)$.

1. Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$, entonces $(\bar{x}, \bar{y})$ es el único punto crítico de (SL) . En particular es aislado para (SL) .
2. Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$, entonces los puntos críticos de (SL) son densos en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$. Más precisamente, el conjunto $\mathcal{C}$ es una recta que contiene a $(\bar{x}, \bar{y})$ si $J(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0_{2 \times 2}$ y es todo el plano si $J(\bar{x}, \bar{y}) = 0_{2 \times 2}$.
3. Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$, entonces $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico aislado de $(SNLA)$.

DEMOSTRACIÓN. Primero observemos que (x, y) es punto crítico de (SL) si, y sólo si,

$$\begin{cases} a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) = 0 \\ c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}) = 0. \end{cases}$$

Es decir, si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = V_0,$$

donde V_0 es un vector constante que depende de $(\bar{x}, \bar{y})$.

1. Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$ el sistema tiene solución única $(\bar{x}, \bar{y})$.
2. Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones, que forman una recta si $J(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ y todo el plano si $J(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.
3. Por contradicción, supongamos que para cada $\delta > 0$ existe otro punto crítico $(\bar{w}, \bar{z})$ de $(SNLA)$ tal que $|(\bar{x}, \bar{y}) - (\bar{w}, \bar{z})| < \delta$. Por definición,

$$\begin{cases} a(\bar{w} - \bar{x}) + b(\bar{z} - \bar{y}) + h_F(\bar{r}) = 0 \\ c(\bar{w} - \bar{x}) + d(\bar{z} - \bar{y}) + h_G(\bar{r}) = 0, \end{cases}$$

donde $\bar{r} = (\bar{w}, \bar{z}) - (\bar{x}, \bar{y})$. De manera equivalente,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w} - \bar{x} \\ \bar{z} - \bar{y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} h_F(\bar{r}) \\ h_G(\bar{r}) \end{pmatrix}.$$

Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} \bar{w} - \bar{x} \\ \bar{z} - \bar{y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_F(\bar{r}) \\ h_G(\bar{r}) \end{pmatrix}.$$

Tomando norma y acotando obtenemos

$$\begin{aligned} \|\bar{r}\| &\leq \|J(\bar{x}, \bar{y})^{-1}\| \sqrt{h_F(\bar{r})^2 + h_G(\bar{r})^2} \\ 1 &\leq \|J(\bar{x}, \bar{y})^{-1}\| \sqrt{\left(\frac{h_F(\bar{r})}{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{h_G(\bar{r})}{\bar{r}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Pero el lado derecho tiende a cero cuando $\bar{r} \rightarrow 0$, con lo que llegamos a una contradicción. $\square$

En resumen, un sistema que no es degenerado en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$ cumple que $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico aislado de $(SNLA)$ y es el único punto crítico de (SL) . El Ejemplo 6.5 muestra que el recíproco del punto 3 es falso en general.

EJEMPLO 6.3 (Conejos y ovejas). Supongamos un modelo para la competencia de dos poblaciones de animales que luchan por recursos en un hábitat reducido:

$$\begin{cases} x' &= 60x - 3x^2 - 4xy \\ y' &= 42y - 3y^2 - 2xy, \end{cases}$$

donde x es la población de conejos e y la de ovejas. Los puntos críticos de este sistema se encuentran resolviendo:

$$\begin{cases} x(60 - 3x - 4y) = 0 \\ y(42 - 3y - 2x) = 0. \end{cases}$$

Tenemos varios casos:

- Si $x = 0$ obtenemos los puntos $(0, 0)$ y $(0, 14)$.
- Si $y = 0$ obtenemos $(0, 0)$ y $(20, 0)$.
- Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$ nos queda el sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 60 \\ 3y + 2x = 42, \end{cases}$ cuya única solución es $(12, 6)$.

Tenemos entonces que $\mathcal{C} = \{(0, 0), (0, 14), (20, 0), (12, 6)\}$, conjunto que muestra las posibilidades de equilibrio entre ambas poblaciones. El único caso en que pueden coexistir ambas especies es $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 6)$. En los demás casos, al menos una de las especies se extingue. Aun así, todas son soluciones de equilibrio. El Jacobiano en este caso está dado

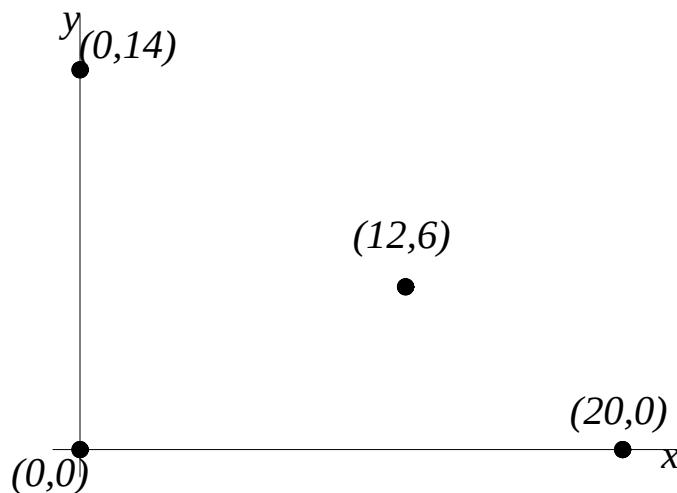


FIGURA 1. Soluciones de equilibrio para el modelo de conejos y ovejas

por:

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 - 6x - 4y & -4x \\ -2y & 42 - 6y - 2x \end{pmatrix}.$$

Evaluando el Jacobiano en cada punto crítico encontramos los respectivos sistemas linealizados:

1. $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$ es invertible. El sistema linealizado alrededor de $(0, 0)$ es

$$(SL)_1 \begin{cases} x' &= 60(x - 0) + 0(y - 0) \\ y' &= 0(x - 0) + 42(y - 0). \end{cases}$$

2. $J(20, 0) = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ también es invertible y

$$(SL)_2 \begin{cases} x' &= -60(x - 20) - 80(y - 0) \\ y' &= 0(x - 20) + 2(y - 0). \end{cases}$$

3. $J(0, 14) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$ también lo es y

$$(SL)_3 \begin{cases} x' &= 4(x - 0) + 0(y - 14) \\ y' &= -28(x - 0) - 42(y - 14). \end{cases}$$

4. Finalmente, $J(12, 6) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$ es invertible y

$$(SL)_4 \begin{cases} x' &= -36(x - 12) - 48(y - 6) \\ y' &= -12(x - 12) - 18(y - 6). \end{cases}$$

Así, el modelo no es degenerado en torno a cada uno de sus puntos críticos. $\square$

EJEMPLO 6.4. Habíamos visto que las ecuaciones de un péndulo sin forzamiento están dadas por

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x). \end{cases}$$

Sus puntos críticos satisfacen

$$\begin{cases} 0 &= \bar{y} \\ 0 &= -\frac{c}{m}\bar{y} - \frac{g}{L}\sin(\bar{x}), \end{cases}$$

de donde

$$\mathcal{C} = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

El Jacobiano es

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}(-1)^k & -\frac{c}{m} \end{pmatrix},$$

que es invertible. El sistema linealizado en torno al origen es

$$(SL) \begin{cases} x' &= 0(x - 0) + 1(y - 0) \\ y' &= -\frac{g}{L}(x - 0) - \frac{c}{m}(y - 0) \end{cases}$$

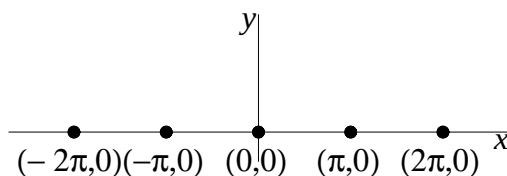


FIGURA 2. Soluciones de equilibrio del péndulo no lineal

y tiene sólo un punto crítico. □

EJEMPLO 6.5. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = x^3 \\ y' = y^3. \end{cases}$$

Vemos que $(0, 0)$ es un punto crítico aislado de este sistema. Sin embargo

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde} \quad J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, este sistema es degenerado en torno al $(0, 0)$. Si intentamos hacer la linealización en torno a $(0, 0)$ obtenemos

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0, \end{cases}$$

cuyos puntos críticos son $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$, como asegura la Proposición 6.1. □

EJEMPLO 6.6. Consideremos el (SNLA)

$$\begin{cases} x' = 3x + x^2 + 2y + y^2 \\ y' = 6x - x^2 + 4y + y^2. \end{cases}$$

Claramente el punto $(0, 0)$ es un punto crítico. Para ver que es el único (y por tanto es aislado) se puede tratar de resolver explícitamente el sistema, pero esto resulta un poco engorroso. Dado que cada ecuación representa una cónica, otra forma de buscar puntos críticos es analizar el gráfico. Si completamos cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 &= \frac{13}{4} \\ -(x - 3)^2 + (y + 2)^2 &= -5, \end{aligned}$$

que corresponden a una circunferencia y una hipérbola, respectivamente. El bosquejo del gráfico se puede ver en la Figura 3.

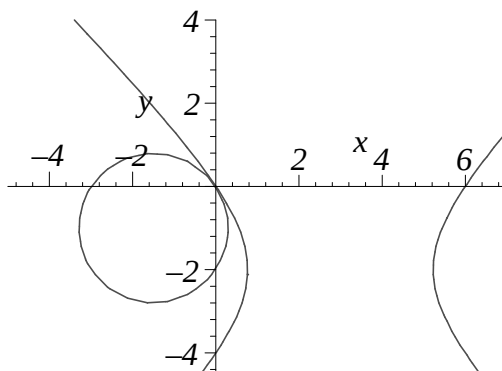


FIGURA 3. Intersección de Cónicas

Para ver que en $(0,0)$ las dos curvas efectivamente son tangentes como sugiere el gráfico, calculemos la derivada en dicho punto:

$$\begin{aligned} 3 + 2x + 2y' + 2yy' &= 0 \Rightarrow y' = -\frac{3+2x}{2(1+y)} \Rightarrow y'(0) = -\frac{3}{2} \\ 6 - 2x + 4y' + 2yy' &= 0 \Rightarrow y' = -\frac{x-3}{2+y} \Rightarrow y'(0) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

La matriz jacobiana está dada por

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3 + 2x & 2 + 2y \\ 6 - 2x & 4 + 2y \end{pmatrix} \quad \text{y luego} \quad J(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

que no es invertible. Por lo tanto el sistema es degenerado. El sistema linealizado en torno a $(0, 0)$ es

$$\begin{cases} x' &= 3x + 2y \\ y' &= 6x + 4y, \end{cases}$$

cuyos puntos críticos son $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{3}{2}x\}$. Aquí el punto $(0, 0)$ tampoco es aislado. $\square$

2. Diagramas de fase y de flujo

Dado el (SNLA)

$$\begin{cases} x' &= F(x, y) \\ y' &= G(x, y) \end{cases}$$

con condición inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, a la solución del problema de Cauchy se le llama **trayectoria que parte de** (x_0, y_0) . Más precisamente, es la función

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : I_0 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)), \end{aligned}$$

donde I_0 es su intervalo máximo de existencia (que por supuesto contiene al que entrega el Teorema de Existencia y Unicidad). El **recorrido** $\mathcal{R}$ de esta trayectoria es el conjunto imagen de la función $\mathcal{T}$. Es decir,

$$\mathcal{R} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I_0\}.$$

Claramente dos trayectorias distintas pueden tener el mismo recorrido.

Un **diagrama de fases** de este sistema autónomo es a una colección de recorridos de las trayectorias para un número representativo de condiciones iniciales. El plano donde se grafica el diagrama de fases se llama **plano de fase**. El interés de los diagramas de fase es que al eliminar el tiempo de las ecuaciones, obtenemos gráficos en 2 dimensiones en lugar de 3, lo que hace más fácil su estudio. Por otra parte, al señalar el sentido de recorrido podemos conocer muchas propiedades, en particular asintóticas, de las trayectorias.

Una consecuencia del Teorema de Existencia y Unicidad es la siguiente

PROPOSICIÓN 6.1. *Si dos trayectorias se intersectan, entonces sus recorridos coinciden.*

DEMOSTRACIÓN. Si dos trayectorias $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ se intersectan como en la Figura 4, entonces existen t_1, t_2 tales que

$$(x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2)).$$

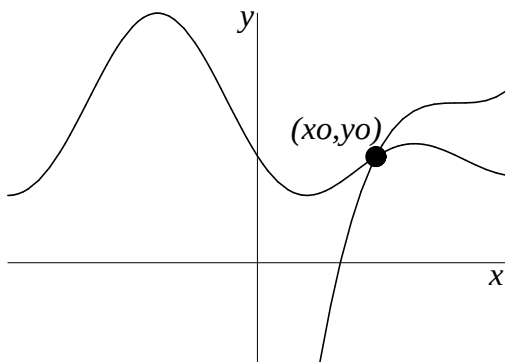


FIGURA 4. Intersección de Recorridos

Denotamos este punto por (x_0, y_0) . La trayectoria $\mathcal{T}_3$ definida por $(x_3(t), y_3(t)) = (x_2(t + t_2 - t_1), y_2(t + t_2 - t_1))$ tiene el mismo recorrido que $\mathcal{T}_2$ porque es una traslación en tiempo y el sistema es autónomo.

Pero también tiene el mismo recorrido que $\mathcal{T}_1$ porque es solución del mismo problema de Cauchy. $\square$

Esto nos dice que las curvas en el diagrama de fase no se intersecan, de modo que una situación como la presentada en la Figura 4 es imposible.

EJEMPLO 6.7. Lo que sí se puede dar para dos trayectorias distintas, es que sus recorridos se confundan. Por ejemplo, tomemos la trayectorias:

$$(44) \quad (x_1(t), y_1(t)) = (\sin(t), \cos(t)) \quad \text{con} \quad (x(0), y(0)) = (0, 1)$$

$$(45) \quad (x_2(t), y_2(t)) = (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{con} \quad (x(0), y(0)) = (1, 0).$$

Elevando al cuadrado cada componente y sumando vemos que ambas trayectorias satisfacen $x^2 + y^2 = 1$. También es fácil ver que recorren toda la circunferencia. Sin embargo lo hacen en sentidos opuestos, como se ilustra en la figura 5. Si queremos hacer que las dos trayectorias

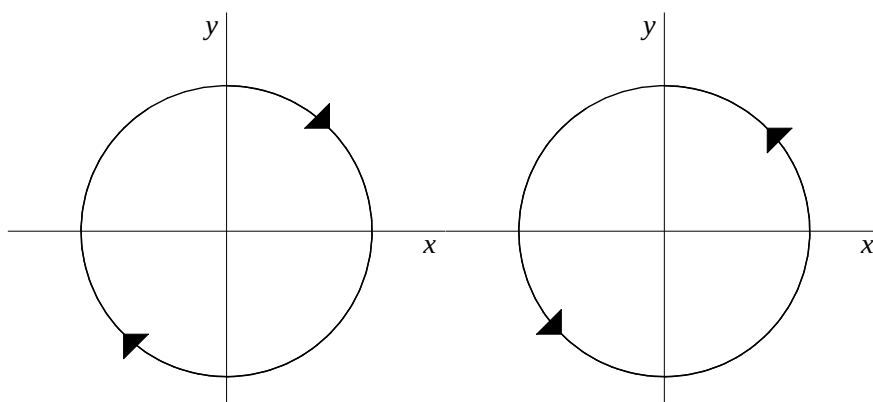


FIGURA 5. A la izquierda el recorrido orientado de (44) y a la derecha el de (45).

recorran la curva en el mismo sentido basta modificar (45) a

$$(\tilde{x}_2(t), \tilde{y}_2(t)) = (\cos(t), -\sin(t)) \quad \text{con} \quad (x(0), y(0)) = (1, 0).$$

$\square$

El **diagrama de flujo** se construye al graficar en una colección de puntos (x, y) representativos el vector $(F(x, y), G(x, y))$. Por regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad \text{y luego} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}.$$

Por lo tanto el recorrido de la trayectoria es tangente al flujo.

3. Clasificación de los puntos críticos

Los puntos críticos de un (*SNLA*) pueden ser de diferentes naturalezas. Un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ es **estable** si para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ de manera que $\|(x(t), y(t)) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \varepsilon$ para todo t , siempre que $\|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta$. De lo contrario se dice que es **inestable**. En palabras, un punto crítico es estable si las trayectorias que parten cerca de él se mantienen cerca.

Por otra parte, un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ es **asintóticamente estable** si es estable y además existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y}), \quad \text{siempre que } \|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta.$$

Notemos que no todo punto estable es asintóticamente estable.

EJEMPLO 6.8. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= -ky, \end{cases}$$

donde k es una constante no nula, con condiciones iniciales: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, que tiene como solución:

$$(46) \quad \begin{cases} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-kt}. \end{cases}$$

Así tenemos una solución $(x(t), y(t))$ que depende de (x_0, y_0) . Para distintos valores de k , esta solución tiene distintas formas.

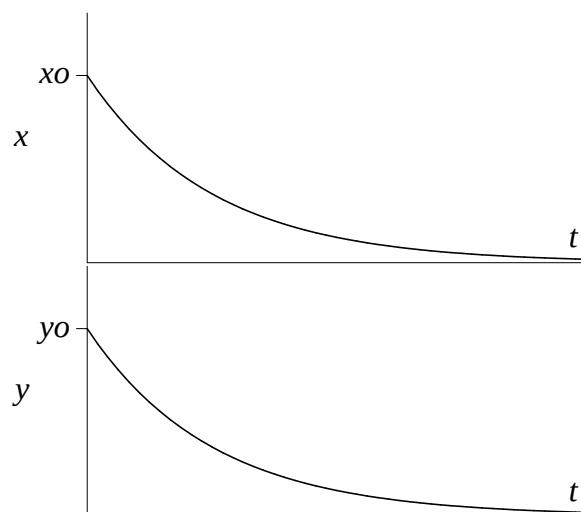
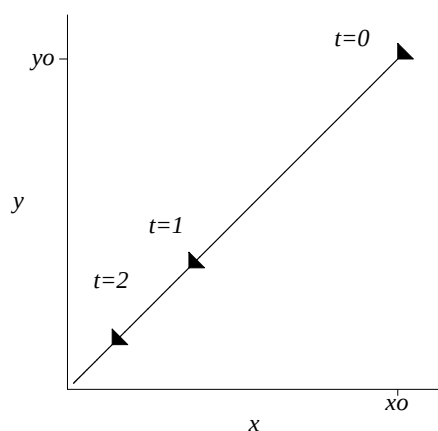
Si tomamos $k = 1$, resultan las soluciones

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-t}. \end{cases}$$

Dividiendo las ecuaciones

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x_0}{y_0} \Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{x_0} x(t),$$

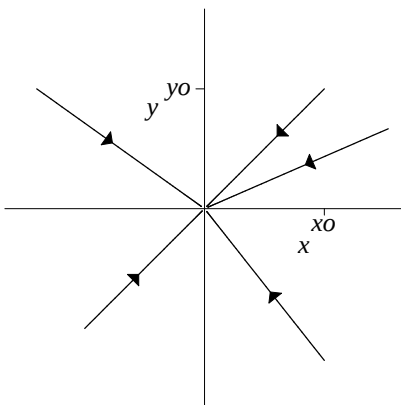
que representan rectas de pendiente $\frac{y_0}{x_0}$, cuyo gráfico en el plano XY queda ilustrado en la Figura 7, donde las flechas indican el sentido positivo del tiempo. Cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos que $(x(t), y(t)) \rightarrow 0$.

FIGURA 6. Soluciones de (46) para $k > 0$.FIGURA 7. Solución del sistema para una condición inicial en el plano de fases XY

Si graficamos las soluciones para diferentes valores positivos y negativos de x_0 y de y_0 construimos el diagrama de fase de la Figura 8, donde se aprecia claramente que todas las soluciones concurren al origen. Esta característica hace que este punto crítico sea asintóticamente estable.

Ahora, si cambiamos el parámetro a $k = 2$, resulta

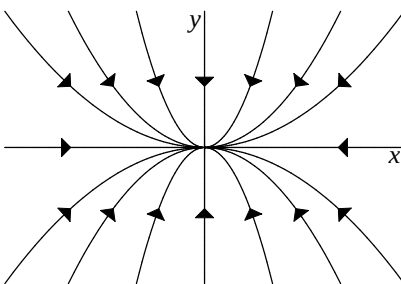
$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = y_0 e^{-2t}, \end{cases}$$

FIGURA 8. Diagrama de fase completo para $k = 1$

Cuando $t \rightarrow \infty$ las soluciones también se acercan al origen. Elevando al cuadrado la primera ecuación y reemplazando en la segunda vemos que

$$y(t) = \frac{y_0}{x_0^2} x^2(t).$$

El diagrama de fases se muestra en la Figura 9. Las soluciones se mueven a lo largo de parábolas y el origen sigue siendo asintóticamente estable.

FIGURA 9. Diagrama de fase para $k = 2$

Analicemos ahora el caso $k = -1$. Esta vez

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^t. \end{cases}$$

Al multiplicar ambas ecuaciones y despejar y obtenemos

$$y = \frac{x_0 y_0}{x},$$

de modo que las soluciones se mueven a lo largo de hipérbolas cuando $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$. Además notamos que cuando $t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$, mientras que $y \rightarrow \pm\infty$ según el signo de y_0 . En este caso el origen deja de ser estable.

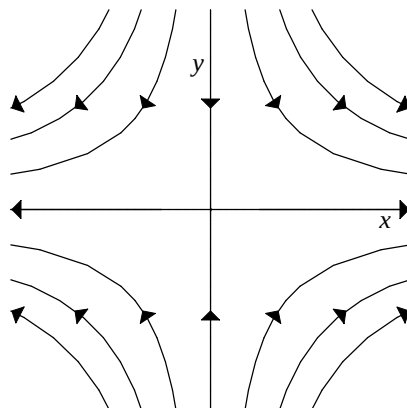


FIGURA 10. Diagrama de fase para $k = -1$

□

Se dice que una trayectoria $t \mapsto (x(t), y(t))$ **converge** o **tiende** al punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ cuando $t \rightarrow \infty$ si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}.$$

Análogamente se define la convergencia cuando $t \rightarrow -\infty$.

Las trayectorias pueden converger de distintas formas, como se muestra en la Figura 11. Hay una gran diferencia geométrica: en el gráfico izquierdo de la Figura 11, la trayectoria se aproxima al origen sin una dirección específica, a diferencia del gráfico derecho, donde claramente tiende a una dirección fija cuando se acerca al origen. Si además de converger al punto $(\bar{x}, \bar{y})$ cuando $t \rightarrow +\infty$, la trayectoria es tal que existe

$$l = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t) - \bar{y}}{x(t) - \bar{x}},$$

entonces se dice que la trayectoria **entra** al punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ tangente a una semirrecta de pendiente l cuando $t \rightarrow \infty$. De la misma forma, si además de converger al punto $(\bar{x}, \bar{y})$ cuando $t \rightarrow -\infty$ la trayectoria es tal que existe

$$l = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t) - \bar{y}}{x(t) - \bar{x}}$$

se dice que la trayectoria **sale** del punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ tangente a una semirrecta de pendiente l cuando $t \rightarrow -\infty$.

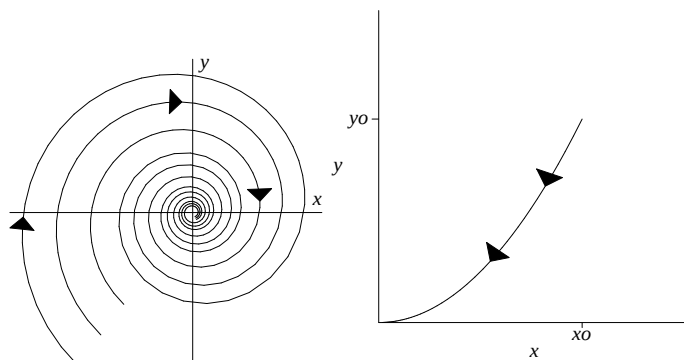


FIGURA 11. Trayectorias que convergen al origen

Un punto crítico aislado $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama **nodo** si todas las trayectorias vecinas, o bien entran al punto $(\bar{x}, \bar{y})$, o bien salen de él.

EJEMPLO 6.9. Para el sistema

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

ya sabemos que las trayectorias convergen a $(0, 0)$. Además, cualquier trayectoria vecina que tenga una condición inicial (x_0, y_0) , tendremos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_0 e^{-t} - 0}{x_0 e^{-t} - 0} = \frac{y_0}{x_0},$$

de modo que entra tangente a una semirrecta de pendiente y_0/x_0 (vertical si $x_0 = 0$). Por lo tanto $(0, 0)$ es efectivamente un nodo. $\square$

EJEMPLO 6.10. En el sistema

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases}$$

también se tiene que el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo. Todas las trayectorias entran al nodo con pendiente $l = 0$ salvo aquellas que parten de algún punto sobre el eje OY , que entran con pendiente vertical. $\square$

Un punto crítico aislado $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama **punto silla** si existen dos trayectorias que entran a él tangentes a semirrectas opuestas y dos que salen de la misma forma. Las restantes trayectorias no convergen a $(\bar{x}, \bar{y})$ y tienen como asíntotas a las semirrectas antes mencionadas.

EJEMPLO 6.11. En el sistema

$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= y, \end{cases}$$

el origen es punto silla (ver Figura 12). □

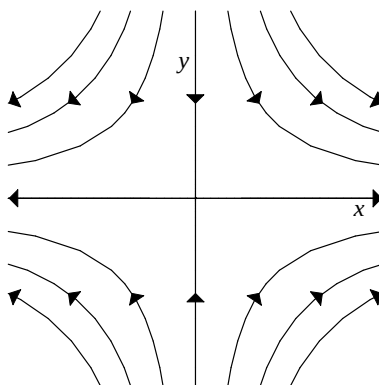


FIGURA 12. Punto silla

Diremos que un punto crítico es punto **espiral** si todas las trayectorias en una vecindad del punto convergen pero no entran cuando $t \rightarrow \infty$, o convergen pero no salen cuando $t \rightarrow -\infty$. Un punto crítico es un **centro** si todas las trayectorias en una vecindad del punto son cerradas y existen trayectorias arbitrariamente cerca del punto.

EJEMPLO 6.12. Consideremos el sistema

$$(47) \quad \begin{cases} x' &= \alpha x + \beta y \\ y' &= -\beta x + \alpha y, \end{cases}$$

con condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ dadas, que tiene claramente el único punto crítico $(0, 0)$. Este es un sistema lineal de matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego A es diagonalizable y $A = PDP^{-1}$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$ y

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha t}e^{\beta t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t}e^{-\beta t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \text{sen}(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \text{sen}(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

es una matriz de rotación en un ángulo βt , mientras que $e^{\alpha t}$ es un factor de escala.

Finalmente, la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \text{sen}(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Para bosquejar los diagramas de fase del sistema, sólo es necesario considerar los signos de α y β . La trayectoria se aleja del origen si $\alpha > 0$ pues $e^{\alpha t}$ es creciente. Si $\alpha < 0$, la trayectoria se acerca. Por otra parte, la rotación ocurre en sentido horario si $\beta > 0$ y antihorario si $\beta < 0$ (ver Figuras 13, 14, 15).

Si $\alpha = 0$ el módulo de $(x(t), y(t))$ permanece constante por lo que la trayectoria define circunferencias. Si $\beta = 0$ no hay rotación y las soluciones se mueven a lo largo de rectas por el origen.

Las Figuras 13, 14 y 15 nos dicen también las características de estabilidad del punto crítico $(0, 0)$: si $\alpha < 0$ es un punto espiral asintóticamente estable; si $\alpha > 0$ es un punto espiral inestable; si $\alpha = 0$ es un centro estable. Si $\beta = 0$ es un nodo (estable o inestable según el signo de α). $\square$

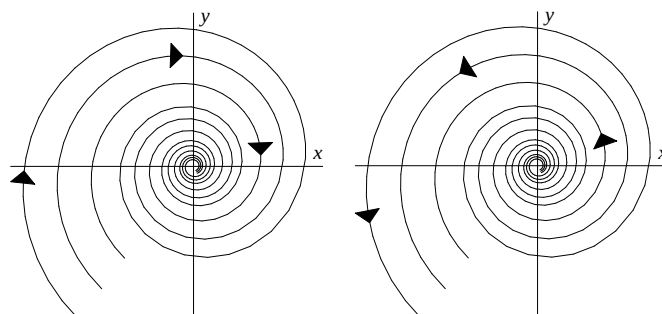


FIGURA 13. Diagrama de fase del sistema (47). A la izquierda $\alpha < 0$, $\beta > 0$, y a la derecha $\alpha > 0$, $\beta < 0$.

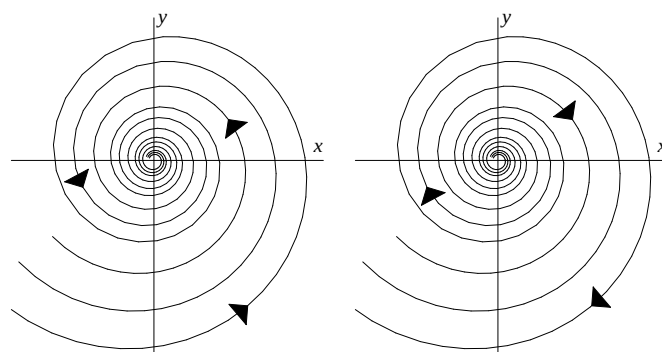


FIGURA 14. Diagrama de fase del sistema (47). A la izquierda $\alpha < 0$, $\beta < 0$, y a la derecha $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

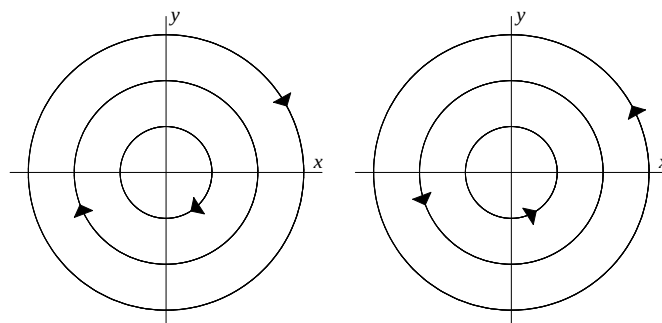


FIGURA 15. Diagrama de fase del sistema (47) para $\alpha = 0$. A la izquierda $\beta > 0$, y a la derecha $\beta < 0$.

4. Puntos críticos de sistemas lineales

Nos interesa estudiar ahora con profundidad los sistemas linealizados, puesto que Henri Poincaré demostró que bajo las hipótesis adecuadas, si se logra clasificar cualitativamente un punto crítico, por ejemplo

en términos de nodo, espiral, etc., entonces estas mismas características se mantendrán en el sistema original no lineal. Y por otra parte, Alexander Liapunov demostró que bajo ciertas hipótesis, se conservaba la estabilidad asintótica de los puntos críticos al linealizar. Por esta razón, ahora nos concentraremos en los sistemas lineales y pospondremos un momento el enunciado exacto de estos teoremas.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer como punto crítico $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ (si este no fuera el caso, basta efectuar una traslación), y entonces consideramos el sistema lineal:

$$(48) \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, y con $ad - bc \neq 0$, para que de esta forma el punto $(0, 0)$ sea el único punto crítico del sistema (y sea aislado).

Tomamos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con valores propios λ_1, λ_2 . Recordemos que una matriz invertible no tiene al cero como valor propio. Luego $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Pueden ocurrir los siguientes casos:

A. Casos Principales:

1. λ_1, λ_2 reales distintos pero de igual signo.
2. λ_1, λ_2 reales distintos y de distinto signo.
3. λ_1, λ_2 complejos (conjugados), con parte real no nula.

B. Casos Frontera:

1. λ_1, λ_2 reales e iguales.
2. λ_1, λ_2 imaginarios puros (conjugados).

Examinaremos por separado cada uno de los casos descritos arriba.

A. Casos Principales:

En todos estos casos los valores propios son distintos, por ende la matriz es diagonalizable, es decir, se puede escribir de la forma $A = PDP^{-1}$, con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad P = (v_1 \mid v_2),$$

donde v_1, v_2 son los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 , respectivamente. De esta forma la solución del sistema lineal es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}} \\ \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma, el problema se desacopla en estas nuevas coordenadas $\tilde{x}, \tilde{y}$ introducidas por las direcciones de los vectores propios (llamadas también **direcciones propias**). Resulta simplemente

$$\begin{cases} \tilde{x} &= e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y} &= e^{\lambda_2 t} \tilde{y}_0. \end{cases}$$

Observemos que si, por ejemplo, $\lambda_1 < 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 = 0.$$

Si $\lambda_1 > 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 = \pm\infty,$$

donde el signo de $\pm\infty$ está dado por el signo de la condición inicial. El mismo argumento es válido para λ_2 .

Si queremos estudiar el diagrama de fase, eliminamos la variable t de las ecuaciones anteriores y obtenemos

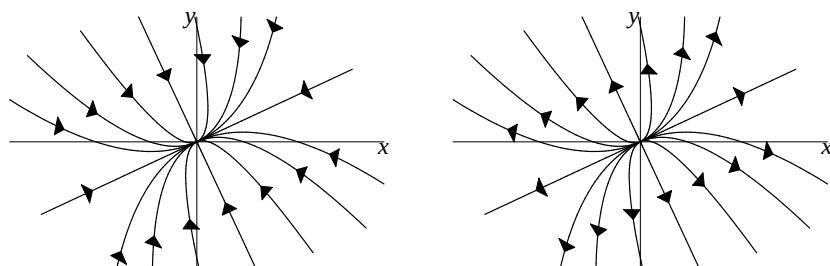
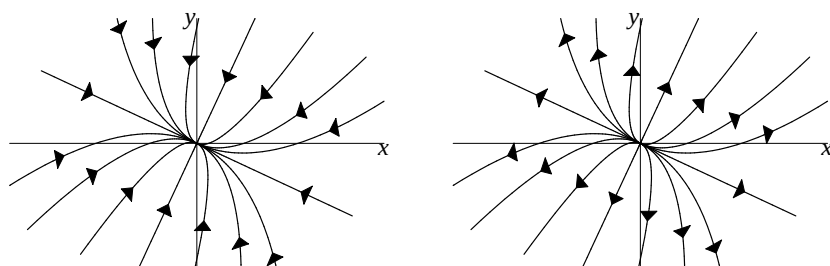
$$\tilde{y} = c_0 \tilde{x}^{\lambda_2/\lambda_1},$$

donde $c_0 = \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{x}_0^{\lambda_2/\lambda_1}}$ es una constante.

A.1. λ_1, λ_2 reales distintos de igual signo.

Sólo hay dos casos: $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ o $\lambda_2/\lambda_1 < 1$. El bosquejo del diagrama de fases para el caso $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ se tiene en la Figura 16. En el gráfico de la izquierda, para $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ se tiene estabilidad asintótica, mientras que en el de la derecha, para $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, el origen es inestable.

Para el caso $\lambda_2/\lambda_1 < 1$, se tiene la Figura 17. En el gráfico de la izquierda, para $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ se tiene estabilidad asintótica, mientras que en el de la derecha, para $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, el origen es inestable.

FIGURA 16. Diagramas de fase de (48) para $\lambda_2/\lambda_1 > 1$.FIGURA 17. Diagramas de fase de (48) para $\lambda_2/\lambda_1 < 1$.

Como conclusión tenemos que en ambos casos el punto $(0,0)$ es un nodo. Si los valores propios son negativos, es asintóticamente estable; si son positivos, entonces es inestable. Además, vemos que en general para el caso de valores propios reales distintos de igual signo, los recorridos de las trayectorias son siempre tangentes a la recta dada por la dirección del vector propio asociado al valor propio *de menor módulo*.

En efecto:

- $|\lambda_1| < |\lambda_2| \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1 \Rightarrow$ recorrido tangente a v_1 .
- $|\lambda_2| < |\lambda_1| \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1 \Rightarrow$ recorrido tangente a v_2 .

A.2. λ_1, λ_2 reales con distinto signo.

Los diagramas de fase serán los de la Figura 18. El punto crítico es un punto silla, que por supuesto es inestable. Las trayectorias entran en la dirección propia asociada al valor propio negativo y salen en la dirección propia asociada al valor propio positivo.

EJEMPLO 6.13 (Continuación de conejos y ovejas). Volvamos al ejemplo de los conejos compitiendo con las ovejas:

$$\begin{cases} x' &= 60x - 3x^2 - 4xy \equiv F(x, y) \\ y' &= 42y - 3y^2 - 2xy \equiv G(x, y). \end{cases}$$

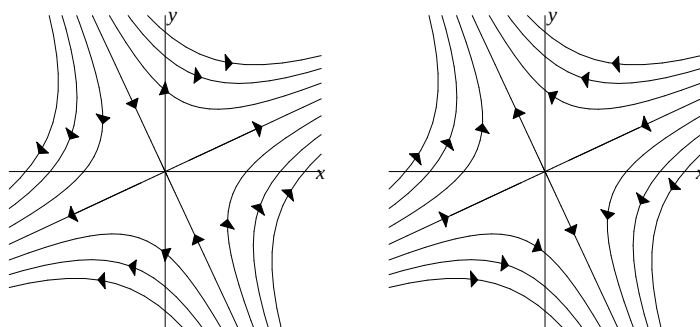


FIGURA 18. Diagramas de fase de (48) para λ_2 y λ_1 de signos distintos.

Sabemos que

$$\mathcal{C} = \{(0, 0), (0, 14), (20, 0), (12, 6)\}.$$

Vimos que este sistema no era degenerado entorno a ninguno de estos cuatro puntos críticos, que ahora clasificaremos con respecto al sistema linealizado. Ya habíamos evaluado el jacobiano en cada punto crítico:

1. $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$. Sus valores propios son $\lambda_1 = 60$ y $\lambda_2 = 42$, por lo que se trata de un nodo inestable. Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Los recorridos de las trayectorias son tangentes a la dirección v_2 (salvo los 2 que son tangentes a v_1).

2. $J(20, 0) = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sus valores propios son $\lambda_1 = -60$ y $\lambda_2 = 2$, por lo que éste es un punto silla. Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 80 \\ -62 \end{pmatrix},$$

respectivamente. El eje de las trayectorias convergentes es la dirección v_1 .

3. $J(0, 14) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$. Sus valores propios son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -42$, por lo que éste también es un punto silla. Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 46 \\ -28 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. El eje de las trayectorias convergentes es la dirección v_2 .

4. $J(12, 6) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$. Sus valores propios son $\lambda_1 = -27 - 3\sqrt{73} \approx -52,6$ y $\lambda_2 = -27 + 3\sqrt{73} \approx -1,4$ por lo que el punto crítico $(12, 6)$ es un nodo asintóticamente estable. Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 + \sqrt{73} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 - \sqrt{73} \end{pmatrix},$$

respectivamente. Los recorridos de trayectorias son tangentes a la dirección v_2 (salvo los 2 que son tangentes a v_1).

En conclusión tenemos que en el punto $(0, 0)$ donde ambas especies desaparecen es inestable, al igual que cuando una sola especie sobrevive en los puntos $(20, 0)$ y $(0, 14)$. El punto $(12, 6)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo que si tomamos cualquier condición inicial que no sean los otros puntos críticos, tendremos que en un tiempo suficientemente extenso se dará la coexistencia de conejos y ovejas en las vecindades del punto $(12, 6)$. Podemos hacer ahora un esbozo del diagrama de fases.

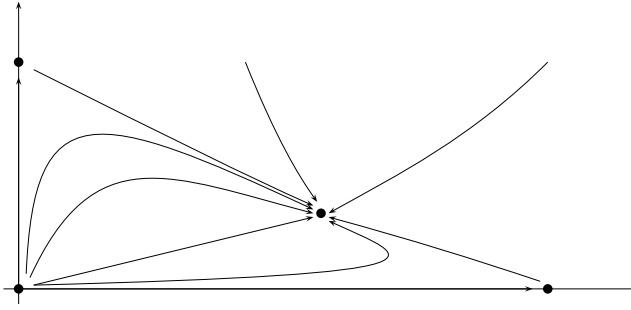


Diagrama de fases del modelo de conejos y ovejas.

□

A.3. λ_1, λ_2 complejos conjugados, con parte real no nula, esto es

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0 \quad \text{y} \quad \beta \neq 0.$$

Esto es equivalente (con un cambio de base) al sistema

$$\begin{cases} \tilde{x} &= \alpha \tilde{x} + \beta \tilde{y} \\ \tilde{y} &= -\beta \tilde{x} + \alpha \tilde{y} \end{cases}$$

pues las matrices $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, tienen igual polinomio característico. Ya habíamos analizado este caso en el Ejemplo 6.12. Vimos que el origen es un punto espiral asintóticamente estable si $\alpha < 0$ y un espiral inestable si $\alpha > 0$.

EJEMPLO 6.14 (Péndulo no lineal). Ahora que tenemos más herramientas, seguiremos con el ejemplo del péndulo no lineal. El sistema

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x) \end{cases}$$

tiene puntos críticos $\mathcal{C} = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, y el Jacobiano respectivo es:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x) & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \Rightarrow J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}(-1)^k & -\frac{c}{m} \end{pmatrix},$$

por tanto los valores propios dependerán de la paridad de k .

k impar: Tenemos que $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda - \frac{g}{L} = 0$, de donde

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} + \frac{g}{L}}.$$

Puesto que todas las constantes son positivas tenemos dos valores propios reales de distinto signo. Los puntos críticos resultan ser puntos sillas inestables.

k par: Aquí $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{g}{L} = 0$ y luego

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{g}{L}}.$$

Analicemos por casos el signo de la cantidad subradical:

1. *Sobreamortiguado:* El caso $\frac{c^2}{4m^2} > \frac{g}{L}$ nos entrega dos valores propios reales distintos, ambos negativos, por lo que los puntos críticos $(k\pi, 0)$ resultan nodos asintóticamente estables.
2. *Subamortiguado:* El caso $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{g}{L}$ nos entrega dos valores propios complejos conjugados, por lo que los puntos críticos $(k\pi, 0)$ resultan puntos espirales, que además son asintóticamente estables pues $\alpha = -\frac{c}{2m} < 0$.

Este caso corresponde al más común, que ocurre cuando el coeficiente de roce es pequeño (notar que $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{g}{L}$ si, y sólo si, $c < 2m\sqrt{\frac{g}{L}}$).

Notemos que si el péndulo está en posición vertical hacia arriba,

que corresponde a los puntos k impar, está en un equilibrio inestable. Intuitivamente, si en esta posición lo perturbamos ligeramente, el péndulo oscila hasta la posición vertical hacia abajo, que son los puntos espirales asintóticamente estables con k par (ver Figura 19).

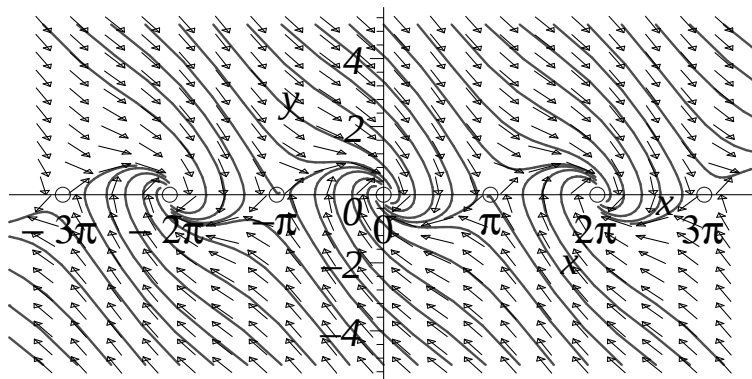


FIGURA 19. Diagramas de fase del péndulo subamortiguado.

3. *Críticamente amortiguado*: El caso $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{g}{L}$ nos entrega un sólo valor propio real negativo. Este caso aún no lo hemos analizado, por lo que lo pospondremos momentáneamente.

□

B. Casos Frontera.

B.1. Un sólo valor propio λ con multiplicidad 2.

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy, \end{cases}$$

con la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ no es necesariamente diagonalizable (pues tiene el valor propio repetido), pero siempre se puede llevar a su forma canónica de Jordan $A = PJP^{-1}$, donde J puede tener uno o dos bloques. En el caso de tener dos bloques, la matriz es diagonalizable, con

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y de aquí} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Luego, la ecuación en las nuevas coordenadas dadas por los vectores propios generalizados v_1, v_2 es:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = e^{\lambda t} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y} = e^{\lambda t} \tilde{y}_0 \end{cases}.$$

El diagrama de fase de este caso ya es bien conocido del comienzo del capítulo (ver Figura 8 para caso $\lambda < 0$). El punto crítico será un nodo asintóticamente estable si el valor propio es negativo y un nodo inestable si es positivo.

Si la matriz no es diagonalizable, tenemos:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y entonces} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

De esta forma el sistema en las nuevas coordenadas dadas por los vectores propios generalizados v_1, v_2 , es:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = e^{\lambda t} \tilde{x}_0 + te^{\lambda t} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y} = e^{\lambda t} \tilde{y}_0 \end{cases}.$$

De aquí se tiene que si $\lambda < 0$ resulta un nodo asintóticamente estable, y si $\lambda > 0$, es un nodo inestable. De hecho, de la segunda ecuación se puede despejar $t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \right)$. Reemplazando en la primera obtenemos

$$\tilde{x} = \tilde{y} \left(\frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \right) \right).$$

Si ahora derivamos con respecto a $\tilde{y}$, vemos que

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{y}} = \left(\frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \right) \right) + \frac{1}{\lambda} = \frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + t + \frac{1}{\lambda}.$$

Resulta claro que $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{y}} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, de modo que todas las trayectorias entran tangentes a una recta horizontal.

B.2. λ_1, λ_2 imaginarios puros conjugados. Esto equivale (con un cambio de base) al sistema

$$\begin{cases} \tilde{x} = \beta \tilde{y} \\ \tilde{y} = -\beta \tilde{x}. \end{cases}$$

Del Ejemplo 6.12 se tiene que el punto crítico es un centro.

Ahora que ya sabemos como se comporta el sistema lineal en función de sus valores propios, podemos enunciar de forma completa los teoremas de Poincaré y Liapunov:

TEOREMA 6.1 (Poincaré). *Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico de un (SNLA) no degenerado y sean λ_1, λ_2 los valores propios de $J(\bar{x}, \bar{y})$. El punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ en el (SNLA) será:*

- (i) *Un nodo si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son distintos y tienen el mismo signo. En este caso además todas las trayectorias (excepto dos) son tangentes en $(\bar{x}, \bar{y})$ a la dirección propia asociada al valor propio de módulo menor. Las otras dos, están sobre la otra dirección propia.*
- (ii) *Un punto silla si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tienen distinto signo. En este caso además hay dos trayectorias convergentes a $(\bar{x}, \bar{y})$ en la dirección propia asociada al valor propio negativo, y dos divergentes en la dirección propia asociada al valor propio positivo. Las demás, tienen como asíntotas las direcciones propias.*
- (iii) *Un punto espiral si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, con partes real e imaginaria distintas de cero.*

TEOREMA 6.2 (Liapunov). *Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico de un (SNLA) no degenerado y sean λ_1, λ_2 los valores propios de $J(\bar{x}, \bar{y})$. El punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ en el (SNLA) será:*

- (i) *Asintóticamente estable si las partes reales son negativas.*
- (ii) *Inestable si alguno tiene parte real positiva.*

OBSERVACIÓN. Por simplicidad en los teoremas anteriores se ha hecho referencia a las trayectorias pero las afirmaciones de tipo geométrico se refieren en realidad a sus recorridos.

Los resultados anteriores son la base del análisis de los sistemas no lineales, pero no nos dicen nada en los casos en que los valores propios toman los valores frontera. Por ejemplo, en el caso del péndulo críticamente amortiguado en que $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{g}{L}$, el sistema linealizado tenía un sólo valor propio negativo, lo que correspondería a un nodo asintóticamente estable en el sistema lineal, pero esto no nos permite saber exactamente qué comportamiento tiene el sistema no lineal.

4.1. El enfoque traza - determinante. Consideremos el sistema lineal $X'(t) = AX(t)$, donde $A \in M_{2 \times 2}(R)$ es una matriz invertible. El origen es el único punto crítico del sistema. Veremos cómo clasificarlo de acuerdo con las relaciones entre la traza y el determinante de A . Para simplificar la notación introducimos las variables

$$x = \text{tr}(A) \quad \text{e} \quad y = \det(A)$$

que determinan el **plano traza - determinante**.

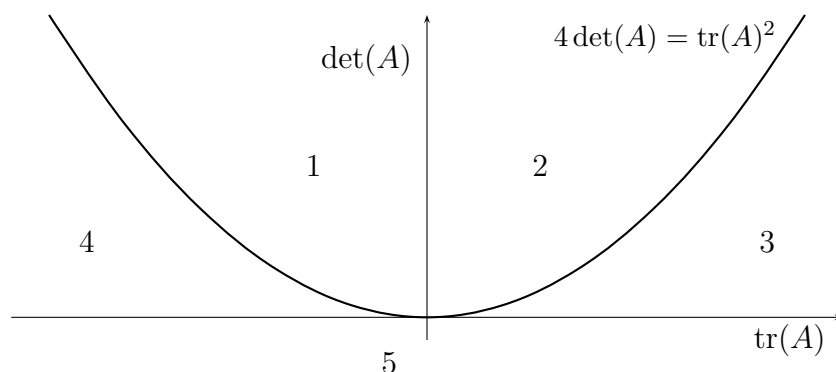
El polinomio característico de la matriz A es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Sus raíces son

$$\lambda = \frac{-\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}.$$

Las raíces son reales sobre la parábola $4\det(A) = \operatorname{tr}(A)^2$. Con la notación dada arriba esto es $4y = x^2$.



Plano traza - determinante.

Cuando estemos en el caso $4y > x^2$ (por encima de la parábola), tendremos el caso de raíces complejas conjugadas. Si $\operatorname{tr}(A) < 0$ (región 1) tendremos un punto espiral inestable; si $\operatorname{tr}(A) = 0$ (eje OY), un centro; y si $\operatorname{tr}(A) > 0$ (región 2), un punto espiral estable.

En el semiplano $\det(A) < 0$ (región 5) las raíces son reales y tienen distinto signo, por lo que tendremos sólo puntos sillas inestables.

Veamos qué pasa entre la parábola $4y = x^2$ y la recta $y = 0$. Si $\operatorname{tr}(A) > 0$ (región 3) hay dos raíces reales negativas, por lo que tenemos un nodo asintóticamente estable; si $\operatorname{tr}(A) < 0$ (región 4), hay dos raíces reales positivas y tenemos un nodo inestable.

Sobre la parábola tenemos una raíz real con multiplicidad 2. Se tienen nodos inestables si $\operatorname{tr}(A) < 0$ y nodos asintóticamente estables si $\operatorname{tr}(A) > 0$.

Hemos concluido así una forma que nos permite tener una idea general del punto crítico de un sistema sólo viendo la traza y determinante

de la matriz, sin tener que calcular valores y vectores propios explícitamente. Sin embargo, si queremos un gráfico preciso del diagrama de fases es inevitable calcular los vectores propios, pues indican las direcciones de tangencia de las trayectorias, para el caso que corresponda.

5. Funciones de Liapunov y estabilidad

Un concepto útil en física para clasificar los puntos de equilibrio de un sistema es el de energía, gracias al siguiente principio:

“En sistemas conservativos, un punto crítico es estable si es un mínimo local de la energía total.”

A grandes rasgos una función de Liapunov es *una energía, en un sentido amplio*. En breve daremos una definición más precisa.

Retomemos el Ejemplo 6.14 del péndulo. Supongamos primero que $c = 0$, lo que significa que *no hay roce*. El sistema es

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{g}{L} \sin(x). \end{cases}$$

La energía cinética de este sistema es $K = \frac{1}{2}mL^2\theta'^2 = \frac{1}{2}mL^2y^2$, y la energía potencial $U = mgL(1 - \cos(\theta)) = mgL(1 - \cos(x))$, entonces la energía total es

$$V(x, y) = K + U = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos(x)).$$

Si derivamos esta función con respecto al tiempo usando la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = mgL \sin(x)x' + mL^2yy'.$$

Pero reemplazando x', y' de las ecuaciones del sistema no lineal, tenemos que $V'(t) = 0$ para todo t , lo que significa que $V(t) = V_0$ para todo t . Es decir, la energía se mantiene constante, por lo que se dice que el sistema es **conservativo**. Por otra parte, los mínimos locales de V son efectivamente los puntos críticos del sistema: $\{(2k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Si el sistema parte de uno de estos puntos, permanece en él; pero si parte de un punto distinto las trayectorias no pueden tender a ningún punto crítico pues ellas se mantienen a niveles constantes de energía. Esto dice que ningún punto crítico puede ser asintóticamente estable.

Consideremos ahora el péndulo *con roce*:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L} \sin(x) \end{cases}$$

Las ecuaciones para la energía son exactamente las mismas, por lo que todavía $V(x, y) = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos(x))$, pero si derivamos y luego reemplazamos x', y' obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = -cL^2y^2 \leq 0.$$

La energía disminuye con el paso del tiempo y se dice que el sistema es **disipativo**. En este caso la pérdida o disminución de energía se debe al roce y es natural pensar que entonces debe tener más posibilidad de evolucionar hacia un punto de equilibrio estable. Es más, antes ya vimos que la posición vertical hacia abajo es punto de equilibrio asintóticamente estable.

Dado un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, una **corona** alrededor de $(\bar{x}, \bar{y})$ es un conjunto $\mathcal{D}_r$ de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| < r\}.$$

Notemos que si a $\mathcal{D}_r$ le agregamos el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ obtenemos la bola abierta $B_r(\bar{x}, \bar{y})$. Una **vecindad perforada** de $(\bar{x}, \bar{y})$ es un abierto que no contiene a $(\bar{x}, \bar{y})$ pero contiene a una corona alrededor de $(\bar{x}, \bar{y})$.

Consideremos el (SNLA)

$$\begin{cases} x' &= F(x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y' &= G(x, y), & y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

donde F y G son funciones continuamente diferenciables.

Sean $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico aislado del (SNLA) y $\mathcal{D}_r$ una corona alrededor de $(\bar{x}, \bar{y})$. Una función continuamente diferenciable $V : B_r(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función de Liapunov** para el sistema en torno al punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ si satisface las siguientes condiciones:

1. Se anula en $(\bar{x}, \bar{y})$ y es positiva en todo $\mathcal{D}_r$.
2. $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G \leq 0$ en $\mathcal{D}_r$.

Si la igualdad en (2) es siempre estricta, decimos que V es una función de Liapunov **estricta**.

Observemos que, a lo largo de las soluciones del sistema, la función de Liapunov decrece. Más precisamente,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}y'(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}F(x(t), y(t)) + \frac{\partial V}{\partial y}G(x(t), y(t)) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

De esta manera se hace evidente la analogía entre las funciones de Liapunov y la energía.

TEOREMA 6.3 (Estabilidad por funciones de Liapunov). *Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico aislado del (SNLA).*

1. *Si existe una función de Liapunov en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$, entonces el punto crítico es estable.*
2. *Si además la función de Liapunov es estricta, el punto es asintóticamente estable.*
3. *Por el contrario, si existe una función con las mismas características pero con $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G > 0$ en $\mathcal{D}_r$, entonces el punto crítico es inestable.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $\varepsilon > 0$. Para probar la estabilidad debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ entonces $x(t), y(t) \in B_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ para todo $t > 0$. Como V es continua existe

$$\min\{V(x, y) \mid (x, y) \in \partial\overline{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})\} = m > 0,$$

donde $\overline{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ es la bola cerrada de centro $(\bar{x}, \bar{y})$ y radio ε y $\partial\overline{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ denota su frontera (que es cerrada y acotada). Por la continuidad de V existe $\delta \in (0, r)$ tal que $V(x, y) < m/2$ para todo $(x, y) \in \overline{B}_\delta(\bar{x}, \bar{y})$. En t_0 tomemos la condición inicial $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$, y la trayectoria asociada $(x(t), y(t))$. Sabemos que $V(x_0, y_0) < m/2$. Además

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = V_x F + V_y G \leq 0$$

de donde

$$V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) < m/2 \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Como $(x(t), y(t))$ es una función continua, la curva que describe no intersecta $\partial\overline{B}_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ para ningún t pues allí V vale m . Concluimos que $(\bar{x}, \bar{y})$ es estable.

2. Para la estabilidad asintótica debemos $\delta > 0$ de manera que si $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$. Como la función

$$t \mapsto V(x(t), y(t))$$

es positiva y decreciente para cualquier condición inicial, ella tiene un límite L cuando $t \rightarrow \infty$. Si $L = 0$, la continuidad de V asegura que $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$ que es el único punto donde V se anula. Probaremos ahora que L no puede ser positivo. En efecto, si $L > 0$ entonces $V(x(t), y(t)) \geq L$ para todo t . Por otro lado, siempre se tiene que $V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0)$. Además, el punto 1 dice que $(\bar{x}, \bar{y})$ es estable, de modo que existe $\delta > 0$ tal que si $(x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ entonces $(x(t), y(t)) \in B_{r/2}(\bar{x}, \bar{y})$. En virtud de la continuidad de V el conjunto

$$\mathcal{K} = \{ (x, y) \in \overline{B_{r/2}(\bar{x}, \bar{y})} \mid L \leq V(x, y) \leq V(x_0, y_0) \}$$

es cerrado y acotado. Además contiene a la trayectoria y no contiene a $(\bar{x}, \bar{y})$. Luego

$$\max \left\{ \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \mid (x(t), y(t)) \in \mathcal{K} \right\} = -k < 0.$$

Tenemos entonces que

$$V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) - kt,$$

cantidad que tiende a $-\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto es imposible puesto que V no toma valores negativos.

3. Se deja como ejercicio al lector. □

Para el ejemplo del péndulo sin roce la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos(x))$$

claramente se anula en los puntos críticos, y es estrictamente positiva en todos los otros puntos, y vimos que $\frac{dV}{dt} \equiv 0$, por lo que por el Teo. anterior, tenemos que los puntos críticos son estables, que es la misma conclusión que obtuvimos con el análisis de linealización del sistema.

Para el sistema amortiguado, si tomamos la misma función V anterior, tenemos que se cumplen las hipótesis del teorema, pero como $\frac{dV}{dt} = -cLy^2 \leq 0$, sólo podemos concluir que el origen es estable, aunque en realidad sabemos que es asintóticamente estable. En un sistema cualquiera, la función de Liapunov es una herramienta muy útil, pero el problema es que hay que probar con diferentes funciones y tratar de encontrar una que sirva. En el caso de sistemas físicos conservativos,

la energía total del sistema en una buena función a considerar, pero ya notamos que en el caso del péndulo amortiguado quizá pueda hacerse algo mejor.

En el péndulo amortiguado, tomemos $\frac{c}{m} = \frac{g}{L} = 1$ para facilitar los cálculos. Probemos con la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

que claramente cumple con la condición de anularse sólo en el punto $(x, y) = (0, 0)$, es continuamente diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ y

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G &= (x + y + 2x)y - (x + y + y)(y + \sin(x)) \\ &= 2xy - y^2 - (x + 2y)\sin(x). \end{aligned}$$

Pero del teorema de Taylor sabemos que

$$\sin(x) = x - \frac{\cos(\xi)}{3}x^3$$

para algún $\xi \in (0, x)$. Como para usar el teorema basta encontrar una vecindad del origen, consideremos $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, con lo que $0 < \cos(\xi) < 1$. Reemplazando esto vemos que

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = -(x^2 + y^2) + \frac{\cos(\xi)}{3}x^3(x + 2y).$$

No es directo establecer si esta expresión cambia de signo o no, pero si hacemos el cambio a coordenadas polares: $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = -r^2 + \frac{\cos(\xi)}{3}r^4 (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)).$$

Claramente

$$-1 < \cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta) < 3$$

y entonces

$$-\frac{1}{3} < \frac{\cos(\xi)}{3} (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)) < 1.$$

Luego, tomando $r < 1$, se tiene

$$\left| r^2 \frac{\cos(\xi)}{3} (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)) \right| < 1,$$

de donde vemos que

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = -r^2 \left\{ 1 + r^2 \left(\frac{\cos(\xi)}{3} (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)) \right) \right\} < 0$$

en una vecindad del origen. El teorema de estabilidad por funciones de Liapunov nos dice que el origen es un punto crítico asintóticamente estable.

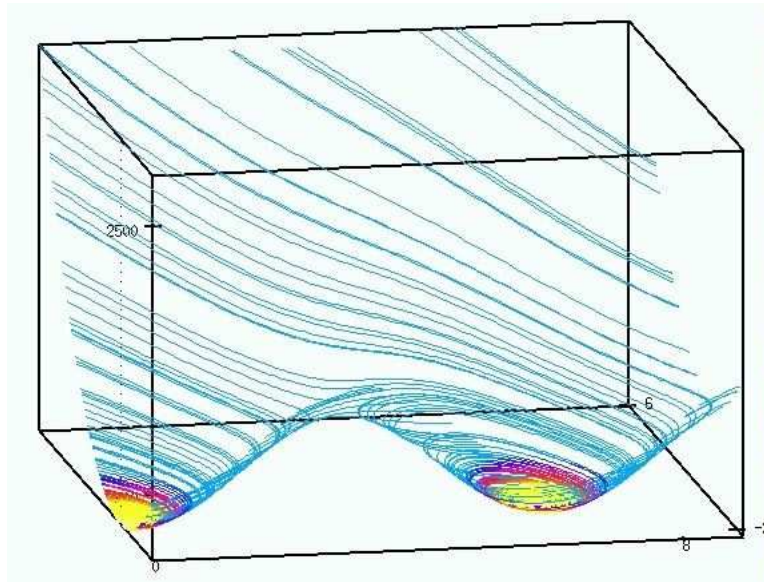


FIGURA 20. Evolución de la energía total del péndulo no-lineal.

Capítulo 7

Introducción al Cálculo de Variaciones

Este capítulo tiene como objetivo introducir los conceptos y métodos básicos del *Cálculo de Variaciones* en una variable a través del estudio de la siguiente clase particular de problemas variacionales:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \\ x(0) = x_0, x(T) = x_1, \end{cases}$$

donde $L = L(t, x, \xi)$ es una función suficientemente regular, $T > 0$ está fijo y $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Más precisamente, estudiaremos las condiciones necesarias de primer orden que deben satisfacer las soluciones de $(\mathcal{P})$.

1. Funcionales y problemas variacionales

Diversos problemas en matemáticas puras y aplicadas consisten en determinar una función que minimice algún criterio, costo o energía, sujeto a ciertas restricciones. Típicamente, en estos problemas el criterio a optimizar viene dado por una correspondencia que a cada función perteneciente a alguna clase o conjunto de funciones le asigna un único número real, el cual tiene alguna interpretación geométrica, física o económica. Llamaremos *funcional* a toda correspondencia de este tipo y *problema variacional* al problema de optimización asociado.

Para dar un contexto más preciso a lo anterior, denotemos por $C^k(a, b; \mathbb{R})$ la clase de todas las funciones $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que son k veces diferenciables y su derivada k -ésima es continua en el intervalo $[a, b]$. En todo lo que sigue, nos concentraremos en funcionales del tipo

$$J : C^1(a, b; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto J(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

para alguna función

$$\begin{aligned} L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, \xi) &\mapsto L(t, x, \xi), \end{aligned}$$

la que supondremos suficientemente regular.

1.1. Ejemplos.

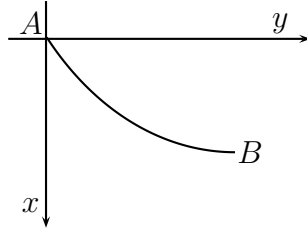
EJEMPLO 7.1 (Camino más corto). Encontrar la curva plana más corta que une dos puntos $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$, i.e. encontrar la curva $y = y(x)$ que minimice el funcional

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

bajo la restricción

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

EJEMPLO 7.2 (Braquistócrona). Partiendo desde el origen $A = (0, 0)$, una partícula con peso se desliza bajo la influencia de la gravedad sobre una curva que une A con otro punto $B = (x_1, y_1)$. Tomando el eje x positivo hacia abajo y el eje y positivo hacia la derecha, pedimos que B cumpla $x_1 > 0, y_1 > 0$.



El tiempo que le toma a la partícula recorrer este camino depende de la curva recorrida y por lo tanto la correspondencia que a cada curva regular le asocia el tiempo necesario para recorrerla es un funcional. La curva de tiempo mínimo se conoce como la *braquistócrona*. Para modelar este problema, sea $y \in C^1(x_0, x_1)$ una función que une A con B . Tenemos que la rapidez de la partícula que desliza por y satisface

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dt}.$$

Por otra parte, suponiendo que la partícula inicia su movimiento desde el reposo ($v(0) = 0$) tenemos que por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgx = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gx}$$

Así, al menos formalmente,

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}} dx,$$

de modo que el tiempo de recorrido a minimizar está dado por

$$J(y) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}} dx.$$

sujeto a

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

EJEMPLO 7.3 (El modelo de Ramsay). Se asume que un individuo tiene la opción, a cada instante t , de consumir y de invertir. Sean $x(t)$ y $c(t)$ el capital y el consumo del individuo en el instante t respectivamente. Suponemos además que una función $f = f(x)$ representa la producción de capital y una función $u = u(c)$, llamada *función de utilidad*, describe el beneficio instantáneo del individuo ante un consumo dado por c . Luego, en un horizonte $[0, T]$, el individuo busca maximizar la utilidad esperada, esto es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{máx} \int_0^T u(c(t)) dt \\ \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) - c(t) \\ x(0) = x_0 \text{ (capital inicial)} \\ x(T) = x_1 \text{ (capital final)} \end{array} \right.$$

o equivalentemente

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \int_0^T -u(f(x(t)) - \dot{x}(t)) dt \\ x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1. \end{array} \right.$$

2. Condiciones necesarias de primer orden: Las ecuaciones de Euler-Lagrange

Supongamos la existencia de una solución, nos interesa poder caracterizarla mediante una ecuación, ya sea con el fin de obtener un método para calcularla o bien para deducir más propiedades sobre la solución a partir de la ecuación.

TEOREMA 7.1. *Supongamos que $L = L(t, x, \xi)$ es suficientemente regular (al menos de clase $C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$). Si $\bar{x} \in C^2(0, T; \mathbb{R})$ es una solución de $(\mathcal{P})$ entonces*

$$(49) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \xi}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)), \quad t \in [0, T].$$

Observación: Notemos que (49) es una ecuación diferencial de segundo orden para $\bar{x}$, la cual se conoce como la *ecuación de Euler-Lagrange* de $(\mathcal{P})$.

Demostración. Para simplificar la notación, haremos la demostración en el caso que $L = L(x, y)$; cuando la dependencia con respecto a t es explícita, los argumentos son similares. Para establecer este resultado, la idea es “perturbar” la solución $\bar{x}$. Consideremos una función $h \in C^1(0, T, \mathbb{R})$ tal que

$$h(0) = h(T) = 0.$$

Definamos

$$\Phi(\lambda) = J(\bar{x} + \lambda h), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

donde

$$J(x) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt.$$

Observemos que la función

$$x_\lambda(t) = \bar{x}(t) + \lambda h(t)$$

es factible para el problema $(\mathcal{P})$ pues $x_\lambda \in C^1(0, T; \mathbb{R})$, $x_\lambda(0) = \bar{x}(0) = 0$ y $x_\lambda(T) = \bar{x}(T) = x_1$. De este modo, por optimalidad de $\bar{x}$ para $(\mathcal{P})$, deducimos que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Phi(0) \leq \Phi(\lambda),$$

de modo que 0 es un mínimo de Φ . Si Φ es diferenciable entonces debe satisfacerse la condición necesaria de optimalidad

$$\Phi'(0) = 0.$$

Como L , $\bar{x}$ y h son de clase C^1 (L es C^2), tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi'(0) &= \frac{d}{d\lambda} J(\bar{x} + \lambda h)|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} \int_0^T L(x_\lambda(t), \dot{x}_\lambda(t)) dt|_{\lambda=0} \\ &= \int_0^T \frac{d}{d\lambda} [L(\bar{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\bar{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t))] |_{\lambda=0} dt \\ &= \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) h(t) + \frac{\partial L}{\partial \xi}(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \dot{h}(t) \right] dt.\end{aligned}$$

Luego, para todo $h \in C^1(0, T; \mathbb{R})$ tal que $h(0) = h(T) = 0$ se tiene

$$(50) \quad \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) h(t) + \frac{\partial L}{\partial \xi}(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \dot{h}(t) \right] dt = 0$$

Ahora integremos por partes el primer sumando. Para esto, llamemos $c(t) = \frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$, $A(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau$. Como $c(t)$ y $h(t)$ son C^1 (pues L y $\bar{x}$ son C^2), entonces:

$$\int_0^T c(t) h(t) dt = A(t) h(t) \Big|_0^T - \int_0^T A(t) \dot{h}(t) dt = - \int_0^T A(t) \dot{h}(t) dt,$$

Luego, reemplazando en (50), obtenemos:

$$(51) \quad \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial \xi}(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) - A(t) \right] \dot{h}(t) dt = 0$$

y esto se tiene $\forall h \in C^1(0, T, \mathbb{R})$ tal que $h(0) = h(T) = 0$. Nos gustaría poder decir de aquí que $\frac{\partial L}{\partial \xi}(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) - A(t) = \alpha$, con α constante, pues si fuese cierto, derivamos respecto a t y obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \xi}(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)), \quad t \in [0, T].$$

Lo que demostraría el resultado.

Veamos que, en efecto, podemos concluir de (51) que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial L}{\partial \xi}(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) - A(t) = \alpha$. Lo que necesitamos es un argumento de localización, que vamos a probar mediante 2 lemas.

LEMA 7.1. Sea $c \in C([a, b])$ tal que $c(t) \geq 0 \ \forall t \in [a, b]$ y

$$\int_a^b c(t) dt = 0$$

Entonces, $c \equiv 0$ en $[a, b]$.

Demostración. Supongamos por contradicción que existe un $t_0 \in (a, b)$ tal que $c(t_0) > 0$. Como $c(t)$ es continua, existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ $c(t) > 0$. Además $c(t)$ alcanza su mínimo en $I = [t_0 - \frac{\epsilon}{2}, t_0 + \frac{\epsilon}{2}]$, $c_0 = \min_{t \in I} c(t) > 0$. Entonces

$$0 = \int_a^b c(t) dt \geq \int_{t_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{t_0 + \frac{\epsilon}{2}} c_0 = c_0 \epsilon > 0$$

De donde se concluye el lema. $\square$

LEMA 7.2. Sea $c \in C(a, b)$ tal que

$$\int_a^b c(t) \dot{h}(t) dt = 0$$

para toda función $h \in C^1(a, b)$ con $h(a) = h(b) = 0$. Entonces, existe una constante $\bar{c} \in \mathbb{R}$ tal que $c \equiv \bar{c}$ en $[a, b]$.

Demostración. Sea

$$\bar{c} = \frac{1}{b-a} \int_a^b c(t) dt$$

y consideremos

$$h(t) = \int_a^t [c(\tau) - \bar{c}] d\tau,$$

función que satisface $h(a) = h(b) = 0$ y además $h \in C^1(a, b)$. En consecuencia

$$0 = \int_a^b c(t) \dot{h}(t) dt = \int_a^b c(t) [c(t) - \bar{c}] dt.$$

Como

$$\int_a^b \bar{c} [c(t) - \bar{c}] dt = \bar{c}(b-a)\bar{c} - \bar{c}^2(b-a) = 0,$$

deducimos que

$$\int_a^b [c(t) - \bar{c}]^2 dt = 0.$$

Luego, $[c(t) - \bar{c}]^2 \equiv 0$ en $[a, b]$ por el lema 7.1, lo que implica que $c \equiv \bar{c}$ en $[a, b]$. $\square$

Lo anterior concluye la demostración del teorema. $\square$

3. Ejemplos

EJEMPLO 7.4 (Dinámica de una partícula). Dado $m > 0$, consideremos el problema

$$(\mathcal{P}_m) \quad \min \left\{ \int_0^T \left[\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - U(x(t)) \right] dt \mid x \in C^1(0, T; \mathbb{R}), x(0) = x_0, x(T) = x_1 \right\}.$$

Supongamos que U es suficientemente regular (al menos $U \in C^1(\mathbb{R}^3)$) y que existe una solución de $(\mathcal{P}_m)$, $\bar{x} \in C^2(0, T; \mathbb{R})$ que satisface la ecuación de Euler-Lagrange que en este caso es:

$$m \frac{d}{dt} \dot{x}(t) = - \frac{dU}{dx}(x(t)) \quad t \in [0, T]$$

En consecuencia $\bar{x} \in C^2(0, T; \mathbb{R}^3)$ satisface el problema diferencial de segundo orden con condiciones de borde

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \frac{dU}{dx}(x) = 0, \\ x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1. \end{cases}$$

Si $U \in C^k$ entonces se deduce recursivamente que $\bar{x} \in C^{k+1}(0, T; \mathbb{R})$. Este es el problema diferencial correspondiente al movimiento de una partícula de masa m sometida a un campo de fuerzas conservativo $F = -\frac{dU}{dx}$ asociado al potencial U . En este contexto, a la función

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - U(x(t))$$

se le llama *lagrangiano*, y el hecho que la trayectoria de la partícula sea una solución de $(\mathcal{P}_m)$ se conoce como el *principio de mínima acción*, entendiendo por “acción” la integral del lagrangiano.

EJEMPLO 7.5 (Camino más corto (continuación)). Resolvamos este problema para el caso particular $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$. El problema

queda, entonces, en minimizar:

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

bajo la restricción

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange con $L(y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$, entonces nos queda:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'}(y(x), y'(x)) = \frac{\partial L}{\partial y}(y(x), y'(x)) = 0$$

Lo que implica

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Despejando y' obtenemos la ecuación

$$\sqrt{\frac{K^2}{1 - K^2}} = y'(x),$$

cuya solución es

$$y(x) = x \sqrt{\frac{K^2}{1 - K^2}} + C.$$

Imponiendo $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$, se obtiene $K = \frac{1}{2}$ y $C = 0$ de donde, finalmente, $y(x) = x$.

EJEMPLO 7.6 (Braquistócrona (continuación)). Teníamos,

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gx}} dx.$$

sujeto a

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Entonces $L(x, y, z) = \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{2gx}}$. Notemos que hay una singularidad en $x = 0$, sin embargo, es posible argumentar que la ecuación de Euler-Lagrange es válida en este caso. Tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2gx}} \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$$

La ecuación de Euler-Lagrange queda:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2gx}} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0,$$

de donde se deduce que

$$\frac{1}{\sqrt{2gx}} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Notemos que la constante es nula sólo en el caso de caída libre (pues en ese caso $y'=0$), pero como pedimos que $y_1 > 0$ no tenemos ese problema. Despejando y' y poniendo $K = \frac{1}{4Cg}$, obtenemos la ecuación

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2C-x}}.$$

Hagamos el siguiente cambio de variables $x = C(1 - \cos(t))$, luego

$$\begin{aligned} y(t) &= C \int \sin(t) \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{1 + \cos(t)}} dt \\ &= C \int \sin(t) \sqrt{\frac{(1 - \cos(t))^2}{1 - \cos^2(t)}} dt \\ &= C \int (1 - \cos(t)) dt \\ &= C(t - \sin(t)) + C_1 \end{aligned}$$

Así, obtenemos x e y de forma paramétrica:

$$x(t) = C(1 - \cos(t)),$$

$$y(t) = C(t - \sin(t)) + C_1.$$

Observamos que $y(0) = 0$ implica $C_1 = 0$. Para determinar C hay que imponer $y(x_1) = y_1$.

4. Ejercicios

1. Resuelva los siguientes problemas

(a)

$$\begin{cases} \min \int_1^2 -\frac{(\dot{x}(t))^3}{t^2} dt \\ x(1) = 1, \quad x(2) = 7. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \min \int_0^1 [2y(x)^3 + 3x^2 y'(x)] dx \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \end{cases}$$

2. *Un caso particular del modelo de Ramsay.* Denotemos por $x(t)$ y $c(t)$ el capital y el consumo de un individuo en el instante t respectivamente. Asuma que la producción de capital está dada por $f(x) = \delta x$ con $\delta > 0$, mientras que la función de utilidad del individuo está dada por $u(c) = -\lambda(c - c^*)^2$ con $\lambda, c^* > 0$. Suponga $x(0) = x_0 > 0$ y $x(T) = 0$ (capital final nulo). Los parámetros δ, λ, c^*, T y x_0 son conocidos.

- (a) Determine la ecuación de Euler-Lagrange que satisface el capital óptimo $\bar{x}(t)$ de acuerdo al modelo de Ramsay.
- (b) Encuentre la función del capital óptimo $\bar{x}(t)$ y la trayectoria de consumo correspondiente $\bar{c}(t)$.