Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otoño 2009

Profesor: Raul Manasevich
Auxiliares: Gonzalo Muñoz, Benjamín Obando

Ecuación de Ricatti

Considere la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt}y(t) = p(t) + q(t)\,y(t) + r(t)\,(y(t))^2$$

Donde p, q y r son funciones.Para resolver la ecuación anterior , conocida como la ecuación de Ricatti, debemos haber encontrado antes mediante algún método una solución de la ecuación. Suponiendo que hemos encontrado una solución a la ecuación anterior $y_1(t)$ realizamos un cambio de variable del estilo $z(t) = y(t) - y_1(t)$. Así en la ecuación de Ricatti remplazamos $y(t) = z(t) + y_1(t)$ y $y'(t) = z'(t)$ obtenemos:

$$\frac{d}{dt}z(t) - (q(t) + 2\,y_1(t)\,r(t))\,z(t) = r(t)\,z^2$$

Para el proceso de encontrar una solución consideraremos el caso en que p,q y r son constantes, en ese caso suponemos que $y_1(t) = c$, donde c es una constante que queremos determinar. Así $\frac{d}{dt}y_1(t) = 0$.De esta forma, como $y_1(t)$ es solución de la ecuación(nuestro supuesto) remplazamos en la ecuación de la forma Ricatti y obtenemos:

$$p + qc + rc^2 = 0$$

Notando que p,q y r son constantes tenemos una ecuación cuadrática para el parámetro c con la cual podemos determinar dos valores de este parametro c_1 y c_2. Así escogemos cualquiera de estos dos valores y realizamos el cambio de variable $z(t) = y(t) - c_1$(por ejemplo) y así obtenemos una ecuación diferencial del tipo Bernoulli de orden 2 para $z(t)$:

$$\frac{d}{dt}z(t) - (q + 2\,c_1 r)\,z = rz^2$$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación:

$$y' = \frac{y^2}{(m+n)^2} - \frac{4mn}{(m+n)^2}y - (m-n)^2.$$

Donde $m > 0$ y $n > 0$ son constantes positivas.

Solución:
Notemos que la ecuación es del tipo Ricatti a coeficientes constantes donde:

$$r = \frac{1}{(m+n)^2},\ q = -\frac{4mn}{(m+n)^2} \text{ y } p = -(m-n)^2$$

Ahora debemos intentar encontrar una solución particular de la ecuación anterior. Ya que los coeficientes son constantes como se expuso anteriormente intentaremos una solución particular constante $y_1(t) = c$ donde $y_1'(t) = 0$ con lo cual, remplazando en la ecuación, obtenemos:

$$\frac{c^2}{(m+n)^2} - \frac{4mn}{(m+n)^2}c - (m-n)^2 = 0.$$

La que es una ecuación cuadrática para c.Al resolver esta ecuacion obtemos dos posibles valores para c:

$$c_1 = (m+n)^2 \text{ y } c_2 = -(m-n)^2$$

Ahora debemos escoger cualquiera de los posibles valores de c, por ejemplo $y_1(t) = c_2 = -(m-n)^2$, realizamos el cambio de variable $z(t) = y(t) - c_2$ y considerando que $z'(t) = y'(t)$(ya que c_1 es constante) y remplazando junto a los valores de p, q y r en la ecuación:

$$z' - (q + 2\,c_2 r)\,z = rz^2$$

tenemos que:

$$(q + 2\,c_2 r) = \frac{-4mn}{(m+n)^2} - 2\frac{(m-n)^2}{(m+n)^2} = -2\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}$$

(noten que si escogen la solucion c_1 este término es el mismo)

Remplazamos y obtenemos:

$$z' - 2\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}z = \frac{z^2}{(m+n)^2}$$

Que es una ecuación de Bernoulli de segundo orden la cual resolvemos aplicando el cambio de variable $u = \frac{1}{z}$, así $u' = \frac{-1}{z^2}z'$, y remplazando en la ecuación anterior obtenemos:

$$u' + 2\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}u = \frac{-1}{(m+n)^2}$$

Que es una ecuación del tipo lineal caso escalar(de factor integrante).Notemos que en este caso como los coeficientes de la ecuación son constantes el factor integrante es igual a:

$$e^{\int p(t)dt} = e^{2t\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}}$$

Multiplicamos por el factor integrante a ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$\frac{d(ue^{2t\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}})}{dt} = \frac{-1}{(m+n)^2}e^{2t\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}}$$

Integrando:

$$ue^{2t\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}} = c - \frac{1}{(m+n)^2}\int e^{2t\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}}dt$$

$$\frac{1}{(m+n)^2}\int e^{2t\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}}dt = \frac{e^{2t\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}}}{2(m^2+n^2)}$$

Así, despejando, obtenemos el valor de u:

$$u(t) = ce^{-2t\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}} - \frac{1}{2(n^2+m^2)}$$

Para terminar el problema debemos expresar la solución en la variable inicial. Así volviendo a $z(t) = \frac{1}{u(t)}$:

$$z(t) = \frac{1}{ce^{-2t\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}} - \frac{1}{2(n^2+m^2)}}$$

Y ya que $y(t) = z(t) + c_2$, tenemos que la solución de la ecuación inicial es:

$$y(t) = \frac{1}{ce^{-2t\frac{(n^2+m^2)}{(n+m)^2}} - \frac{1}{2(n^2+m^2)}} - (m-n)^2$$

En el caso en que $p(t)$,$q(t)$ y $r(t)$ de la ecuacion de Ricatti no sean constantes no existe un procedimiento claro para el cual podamos encontrar una solución particular de la ecuación. Lo más comun es que se exponga una solución particular o que una solución sea mas o menos trivial. Otra manera de abordar el problema de encontrar una solucion particular para la ecuación es realizar un cambio de variable pero con el objetivo de transformar la ecuación inicial donde $p(t)$,$q(t)$ y $r(t)$ no son constantes a otra ecuación donde $p(t)$,$q(t)$ y $r(t)$ si sean constantes y así poder realizar el proceso anteriormente expuesto. Este cambio de variable no es trivial y tiene relación con $p(t)$,$q(t)$ y $r(t)$ de la ecuacion inicial, por ende depende de cada ecuación.

Ejemplo: Resuelva la ecuación

$$y' - y^2 \arctan(y) = \arctan(y) + (3\arctan(y)^2 - 2)(1 + y^2)$$

Solución:
Para resolver la ecuación anterior debemos darnos cuenta que mediante un cambio de variable se puede llevar al estilo Ricatti a coeficientes constantes, esto ya que de cierta forma esta involucrados en la ecuación la funcion $\arctan y$ y su derivada $\frac{1}{1+y^2}$, la tarea ahora es intentar armar y juntar estos elementos de tal forma que el cambio de variable sea natural para obtener una ecuación del estilo Ricatti a coeficientes constantes. Así reescribiendo la ecuación:

$$y' = y^2 \arctan(y) + \arctan(y) + (3\arctan(y)^2 - 2)(1 + y^2)$$

$$y' = (1 + y^2)\arctan(y) + (3\arctan(y)^2 - 2)(1 + y^2)$$

$$\frac{1}{1+y^2} y' = \arctan(y) + (3\arctan(y)^2 - 2)$$

Como podemos ver si realizamos el cambio de variable $u = \arctan y$, $u' = \frac{1}{1+y^2} y'$. Remplazando obtenemos la ecuación:

$$u' = 3u^2 + u - 2$$

Que es una ecuacion de Ricatti a coeficientes constantes donde $p = -2$,$q = 1$ y $r = 3$ (identificados con la ecuación en forma general). Supongamos una solución$u_1 = c$, con c constante, así $u_1' = 0$. Remplazando en la ecuacion para u obtenemos:

$$3c^2 + c - 2 = 0$$

De la cual extraemos que $c_1 = -1$ y $c_2 = \frac{2}{3}$ Así, escogemos $c_1 = -1$ como solución particular suponemos una solución $z = u - (-1)$ y con los valores de p,q y r remplazamos en la ecuación de bernoulli de orden dos asociada al problema de Ricatti

$$z' - (q + 2\,c_1 r)\,z = rz^2$$

con lo que obtenemos:

$$z' + 5u = 3z^2$$

$$z'z^{-2} + 5z^{-1} = 3$$

Que es una ecuación de Bernoulli de orden 2.Realizamos el cambio de variable $w = \frac{1}{z}$ con lo que obtenemos una ecuacion lineal escalar(de factor integrante):

$$-w' + 5w = 3$$

$$w' - 5w = -3$$

Cuyo factor integrante es:

$$e^{\int p(t)dt} = e^{-5t}$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación:

$$(we^{-5t})' = -3e^{-5t}$$

Integrando:

$$we^{-5t} = \frac{3}{5}e^{-5t} + C$$

$$w(t) = \frac{3}{5} + Ce^{-5t}$$

Volviendo a la variable z:

$$z(t) = \frac{1}{\frac{3}{5} + Ce^{-5t}}$$

Volviendo a la variable u:

$$u(t) = \frac{1}{\frac{3}{5} + Ce^{-5t}} - 1$$

y como $u = \arctan y$, Encontramos que la solución de la ecuación inicial es:

$$y(t) = \tan\left(\frac{1}{\frac{3}{5} + Ce^{-5t}} - 1\right)$$