P1

a) como S es regular, orientable, acotada con borde regular ∂S, entonces

$$\int_{\partial S} (a \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,(a \times \vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

pero $$a \times \vec{r} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix}$$

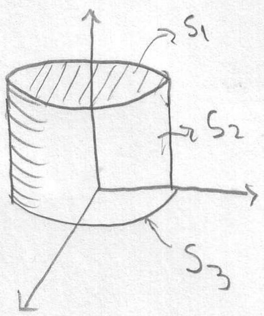
$$\Rightarrow \text{rot}\,(a \times \vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_1 \\ a_2 + a_2 \\ a_3 + a_3 \end{pmatrix} = 2a$$

$$\Rightarrow \int_{\partial S} (a \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} = 2 \iint_S a \cdot d\vec{S}$$

//

b)



Debemos calcular $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$

pero por teorema de la divergencia

$$\iiint_\Omega \text{div}(\vec{F}) \cdot dV = \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde Ω es el volumen encerrado por $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

pero

$$\text{div}(F) = Y^2 Z + x^2 Z$$

Usando coordenadas cilindricas

$$\iiint_\Omega \text{div}(F) = \int_0^2\int_0^1\int_0^{2\pi} (\rho^2 \,\text{sen}^2\theta \cdot z + \rho^2 \cos^2\theta \cdot z) \cdot \rho \, d\theta \, d\rho \, dz$$

$$= \int_0^2\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^3 \cdot z \; d\theta \, d\rho \, dz$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}^2}{2} = \pi$$

Y $\cdot \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{k} \, ds = \iint_{S_1} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, ds$

$\cdot \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_3} \vec{F} \cdot (-\hat{k}) \, ds = \iint_{S_3} \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, ds = -\iint_{S_1} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, ds$

pues la función que se integra no depende de z

$$\Rightarrow \boxed{\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pi}$$

P2

a) Por definición $\check{h}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{(1+s^2)^2(4+s^2)} ds}_{I}$

Haciendo el cambio de variable $w = sx \Rightarrow dw = x\, ds$

Se tiene

$$I = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw}}{\left(1+\frac{w^2}{x^2}\right)^2\left(4+\frac{w^2}{x^2}\right)} \frac{dw}{x} & x > 0 \\ \displaystyle -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw}}{\left(1+\frac{w^2}{x^2}\right)^2\left(4+\frac{w^2}{x^2}\right)} \frac{dw}{x} & x < 0 \end{cases}$$

Estudiemos los polos y residuos de $f(z) = \frac{x^5 e^{iz}}{(x^2+z^2)^2(4x^2+z^2)}$

- Polos en $z = \pm ix$ de orden 2.

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, ix) = \lim_{z\to ix} \frac{d}{dz}\left[\frac{\cancel{(z-ix)^2} \cdot x^5 e^{iz}}{(z+ix)^2 \cancel{(z-ix)^2} (4x^2+z^2)} \right]$$

$$= \lim_{z\to ix} \frac{ix^5 e^{iz}(z+ix)^2(4x^2+z^2) - x^5 e^{iz}\left[2(z+ix)(4x^2+z^2) + (z+ix)^2 \cdot 2z\right]}{(z+ix)^4(4x^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{ix^5 e^{-x} \cdot (-4x^2)(3x^2) - x^5 e^{-x}\left[4ix(3x^2) + 8ix^3\right]}{16x^4 \cdot 9x^4}$$

$$= \frac{i\left[-12e^{-x}\cdot x - 14e^{-x}\right]}{16\cdot 9} = \frac{-ie^{-x}}{36}\left[3x+1\right]$$

y análogamente

$$\mathrm{Res}(f, -ix) = \frac{-i}{36} e^{x} (3x - 1)$$

- Polos en $\pm 2ix$ de orden 1

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(f, 2ix) = \lim_{z \to 2ix} \frac{\cancel{(z-2ix)} \cdot x^5 \, e^{iz}}{(x^2+z^2)^2 \, (z+2ix)\cancel{(z-2ix)}}$$

$$= \frac{x^5 e^{-2x}}{9x^4 \cdot 4ix}$$

$$= \frac{-i e^{-2x}}{36}$$

y análogamente

$$\mathrm{Res}(f, -2ix) = \frac{i}{36} e^{2x}$$

Luego, si $x > 0$

$$I = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, 2ix) + \mathrm{Res}(f, ix) \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-i e^{-2x}}{36} + \frac{-i e^{-x}}{36} (3x+1) \right) = \frac{\pi}{18} \left[e^{-2x} + e^{-x}(3x+1) \right]$$

si $x < 0$

$$I = -2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, -2ix) + \mathrm{Res}(f, -ix) \right)$$

$$= -2\pi i \left(\frac{i e^{2x}}{36} - \frac{i}{36} e^{x} (3x-1) \right) = \frac{\pi}{18} \left[e^{2x} - e^{x} (3x - 1) \right]$$

$$= \frac{\pi}{18} \left[e^{2x} + e^{x} (3 \cdot (-x) + 1) \right]$$

de donde se concluye que

$$\boxed{\check{h}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{18} \left[e^{-2|x|} + e^{-|x|} (3|x|+1) \right]}$$