Ejercicio

Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+3\cos\theta)^2}\,d\theta$.

Solución

$z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}$, $\dfrac{dz}{iz} = d\theta$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+3\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(5+\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2}\,\frac{1}{iz}\,dz$$

$$= -i \oint_{|z|=1} \frac{z}{\left(5z+\frac{3}{2}z^2+\frac{3}{2}\right)^2}\,dz$$

$$= -4i \oint_{|z|=1} \frac{z}{(3z^2+10z+3)^2}\,dz$$

Sea $f(z) = \dfrac{z}{(3z^2+10z+3)^2}$. Entonces f es meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos en las raíces de $3z^2+10z+3=0$:

$$z = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{-10\pm 8}{6} = -\frac{1}{3},\ -3.$$

Entonces $f(z) = \dfrac{z}{9\left(z+\frac{1}{3}\right)^2(z+3)^2}$. El único polo dentro del disco unitario es $z=-\frac{1}{3}$.

$$I = -4i \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(f, -\tfrac{1}{3}\right) = 8\pi\,\mathrm{Res}\left(f, -\tfrac{1}{3}\right)$$

$-\frac{1}{3}$ es polo de orden 2:

$$\lim_{z\to -\frac{1}{3}} \left(z+\frac{1}{3}\right)^2 f(z)$$

$$= \lim_{z\to -\frac{1}{3}} \left(z+\frac{1}{3}\right)^2 \frac{z}{9\left(z+\frac{1}{3}\right)^2(z+3)^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}}{9\left(3-\frac{1}{3}\right)^2} \neq 0.$$

Entonces

$$\operatorname{Res}\left(f,-\frac{1}{3}\right) = \lim_{z\to -\frac{1}{3}} \frac{d}{dz}\left(\left(z+\frac{1}{3}\right)^2 f(z)\right)$$

$$= \lim_{z\to -\frac{1}{3}} \frac{z}{9(z+3)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\lim_{z\to -\frac{1}{3}} \frac{(z+3)^2 - z\cdot 2(z+3)}{(z+3)^4}$$

$$= \frac{1}{9}\lim_{z\to -\frac{1}{3}} \frac{(z+3)-2z}{(z+3)^3} = \frac{1}{9}\,\frac{3+\frac{1}{3}}{\left(3-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{9}\,\frac{\frac{10}{3}}{\left(\frac{8}{3}\right)^3}$$

$$= \frac{10}{8^3}$$

$$\Rightarrow I = 8\pi \operatorname{Res}\left(f,-\frac{1}{3}\right) = 8\pi\cdot\frac{10}{8^3} = \frac{10\pi}{64} = \frac{5\pi}{32}$$

Ejercicio

Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+a^2)}\,dx$ donde $a>0$.

Solución

Aplicamos el teorema visto en clases con $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+a^2)}$

f es meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos en $\pm i$, $\pm ai$.

Además $|f(z)|\le \frac{C}{|z|^4}$ para $|z|\ge 1$ donde $C>0$ es alguna constante. Entonces (por teorema visto en clases)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Res(f(z), z_j)$$

donde o z_j, $j=1..m$ es el conjunto de polos de f con parte imaginaria positiva (no hay polos en $\mathbb{R}$).

Caso $a=1$ $\quad i$ es un polo de orden 2, ya que

$$\lim_{z\to i}(z-i)^2 f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)^2\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

$$=\frac{1}{(2i)^2}\neq 0.$$

Entonces $Res(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2 f(z)\right)$

$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2} = \lim_{z\to i}(-2)\frac{1}{(z+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3}$$

$$=\frac{-2}{-8i}=\frac{1}{4i}=-\frac{i}{4}.$$

Así $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,i) = 2\pi i \cdot \left(\frac{-i}{4}\right)$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

<u>Caso $a\neq 1$</u> En este caso hay 2 polos con parte imaginaria positiva : i, ai y son de orden 1.

En efecto $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)(z-ai)(z+ai)}$

$$\lim_{z\to i} (z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z-ai)(z+ai)} = \frac{1}{2i(i^2+a^2)}$$

$$= \frac{1}{2i(a^2-1)}$$

Además $\mathrm{Res}(f,i) = \dfrac{1}{2i(a^2-1)}$.

ai es polo de orden 1:

$$\lim_{z\to ai} (z-ai)f(z) = \lim_{z\to ai} \frac{1}{(z^2+1)(z+ai)} = \frac{1}{(1-a^2)2ai}$$

y además $\mathrm{Res}(f,ai) = \dfrac{1}{(1-a^2)2ai}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+a^2)}\,dx = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,ai)\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{2i(a^2-1)} + \frac{1}{(1-a^2)2ai}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{(a^2-1)a}\right) = \pi\,\frac{a-1}{(a^2-1)a} = \frac{\pi}{a(a+1)}$$

Ejercicio

Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{a+\cos\theta}\,d\theta$ donde $a>1$.

Solución

$z = e^{i\theta}$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}$ $\quad d\theta = \dfrac{1}{iz}\,dz$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{a+\cos\theta}\,d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}{a+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\,\frac{1}{iz}\,dz$$

$$= -\oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{(2az+z^2+1)z}\,dz.$$

Los polos de $f(z) = \dfrac{z^2-1}{(2az+z^2+1)z}$ son 0 y $z = \dfrac{-2a \pm \sqrt{4a^2-4}}{2}$
$= -a \pm \sqrt{a^2-1}$

Escribamos $z_+ = -a+\sqrt{a^2-1}$, $z_- = -a-\sqrt{a^2-1}$.

Si $a>1$, $z_- < -1$ y se puede verificar que $-1 < z_+ < 0$.

Así los polos dentro del disco unitario son 0 y z_+.

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z\,f(z) = \lim_{z\to 0} z\,\frac{z^2-1}{(z^2+2az+1)z} = -1$$

$$\operatorname{Res}(f,z_+) = \lim_{z\to z_+} (z-z_+)f(z) = \lim_{z\to z_+} (z-z_+)\,\frac{z^2-1}{(z-z_+)(z-z_-)z}$$

$$= \frac{z_+^2-1}{(z_+-z_-)z_+}$$

Pero $z_+ \cdot z_- = \left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)$

$$= a^2 - (a^2-1) = 1$$

Así $\operatorname{Res}(f, z_+) = \dfrac{z_+^2 - 1}{z_+^2 - z_+ \cdot z_-} = \dfrac{z_+^2 - 1}{z_+^2 - 1} = 1$

$$I = -\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = -2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f, z_+)\right)$$

$$= -2\pi i\,(-1 + 1)$$

$$= 0$$