Examen MA 2001-4, 2009

1.

(a) Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función integrable. Definamos $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $x \in \Omega$ (la parte positiva de f). Demuestre que $f^+\colon \Omega \to [0, \infty)$ es integrable. Demuestre que la parte negativa de la función f, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ también es integrable. *Observación:* $f^+(x) = \frac{1}{2}\big[f(x) + |f(x)|\big]$.

Solución: Si f es integrable entonces las funciones $f, |f|$ y $\frac{1}{2}\big[f + |f|\big]$ son integrables y por lo tanto $f^+(x) = \frac{1}{2}\big[f(x) + |f(x)|\big]$ es integrable. Además $f^- = (-f)^+$ y como $-f$ es integrable entonces f^- es integrable. **(3.0 puntos)**

(b) Sea $T\colon D \to \Omega$ una transformacón biyectiva de clase C^1 entre dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$. Demuestre que existe una función continua $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que se cumple

$$\int_D (f \circ T)(x)\, dx = \int_\Omega f(y)\Phi(y)\, dy,$$

para toda función integrable $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Solución:

Usando el teorema de cambio de variables:

$$\int_D (f \circ T)(x)\, dx = \int_\Omega f(y)\big|\mathrm{Jac}\,(T)(y)\big|\, dy,$$

donde $\mathrm{Jac}\,(T)(y)$ es el determinante de la matriz Jacobiana. Entonces

$$\Phi(y) = \big|\mathrm{Jac}\,(T)(y)\big|,$$

y como T es de clase C^1, la función $\big|\mathrm{Jac}\,(T)(y)\big|$ es continua. **(3 puntos)**

2.

(a) Encuentre el cilindro $\mathcal{C}_{r,h} = \{x^2 + y^2 = r, 0 \leq z \leq h\} \subset \mathbb{R}^3$ de máximo volumen contenido en $P = \{0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Solución: El radio de la base del cilindro es $\rho = \sqrt{r}$. Por otro lado $h = 1 - x^2 - y^2 = 1 - r$. Entonces $\mathrm{Vol}, (\mathcal{C}_{r,h}) = \pi\rho^2 h = \pi r(1 - r) \equiv f(r)$. Se tiene $f'(r) = \pi(1 - 3r)$ y por lo tanto $f(r)$ alcanza su máximo para $r^* = \frac{1}{3}$. Por lo tanto $h^* = 1 - r^* = \frac{2}{3}$. **(2.0 puntos)**

(b) Sea C_{r^*,h^*} el cilindro de máximo volumen determinado en la parte (a). Encuentre el volumen del conjunto contenido entre $z = h^*$ y la parte superior de P dada por $z = 1 - x^2 - y^2$.

Solución: El conjunto cuyo volumen se tiene que calcular es de la forma:

$$D = \{(x, y, z) \mid \frac{2}{3} \leq z \leq 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{3}\},$$

o en coordenadas cilíndricas:

$$D = \{(r, \theta, z) \mid \frac{2}{3} \leq z \leq 1 - r^2, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

(2.0 puntos)
Entonces

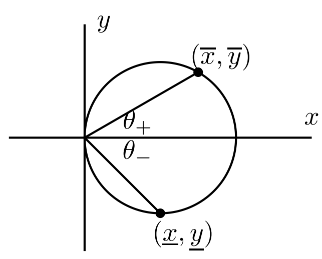
$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(D) &= \int_D dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \int_{\frac{2}{3}}^{1-r^2} r\, dzdrd\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (\frac{1}{3}r - r^3)\, dr \\
&= \frac{\pi}{18}.
\end{aligned}$$

(2.0 puntos)

3.

(a) Consideramos el disco $D = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Sean ℓ_+, ℓ_- dos segmentos tales que ℓ_+ (ℓ_-) conecta el origen con un punto $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Fr}\,(D)$ de la frontera de D ($(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathrm{Fr}\,(D)$), donde $\overline{y} > 0$ ($\underline{y} < 0$ respectivamente). Encuentre el área A del conjunto limitado por los segmentos ℓ_+ y ℓ_- contenido en D y que contiene la parte del eje x. *Observación: Si denotamos los largos de los segmentos ℓ_+, ℓ_- por $|\ell_+|$, $|\ell_-|$, entonces A es una función de dos variables $|\ell_+|$, $|\ell_-|$.*

Solución: El conjunto cuya área queremos calcular se puede visualizar en la siguiente figura:



así vemos que la región que buscamos consiste de dos partes: superior D_+ y inferior D_- respecto del eje x. Denotando los ángulos entre ℓ_+ y el eje

x por $\theta_+ > 0$ y entre ℓ_- y el eje x por $\theta_- < 0$ respectivamente, tenemos, en coordenadas polares:

$$D_+ = \{0 \leq \theta \leq \theta_+, 0 < r < 2\cos\theta_+\}$$
$$D_- = \{0 \geq \theta \geq \theta_-, 0 < r < 2\cos\theta_-\},$$

donde $\cos\theta_+ = \frac{|\ell_+|}{2}$, $\cos\theta_- = -\frac{|\ell_-|}{2}$. Usando las coordenadas polares;

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D_+) &= \int_0^{\theta_+} \int_0^{2\cos\theta} r\, dr d\theta \\
&= \int_0^{\theta_+} 2\cos^2\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{\theta_+} (\cos 2\theta + 1)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\sin 2\theta_+ + \theta_+.
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\mathrm{Vol}(D_+) = -\frac{1}{2}\sin 2\theta_- - \theta_-.$$

Por lo tanto

$$A = \frac{1}{2}\sin 2\theta_+ + \theta_+ - \frac{1}{2}\sin 2\theta_- - \theta_-, \quad \theta_+ = \arccos\big(\frac{|\ell_+|}{2}\big), \theta_- = -\arccos\big(\frac{|\ell_-|}{2}\big).$$

(3 puntos)

(b) Sea $A(|\ell_+|, |\ell_-|)$ el área de la parte (a). Suponiendo que $|\ell_+|^2 + |\ell_-|^2 = 4$ encuentre el máximo del area $A(|\ell_+|, |\ell_-|)$. *Indicación: considere* $A(|\ell_+|, |\ell_-|)$ *como función de los ángulos formados por los segmentos* ℓ_+, ℓ_- *y el eje* x.

Solución: Denotaremos $t = \theta_+$ y $s = -\theta_-$. Usando la parte anterior tenemos que

$$2\cos\theta_+ = |\ell_+|$$
$$2\cos\theta_- = -|\ell_-|$$

y por lo tanto

$$|\ell_+|^2 + |\ell_-|^2 = 4 = 4\cos^2\theta_+ + 4\cos^2\theta_- \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t + \cos^2 s = 1$$

así el problema se puede escribir como

$$\begin{aligned}
&\max_{t,s} f(t,s) := \frac{1}{2}[\sin 2t + \sin 2s] + t + s \\
&\text{s.a. } g(t,s) := \cos^2 t + \cos^2 s - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Usando el método de los multiplicadores de Lagrange se obtiene:

$$\cos 2t + 1 + 2\lambda \cos t \sin t = 0 \tag{1}$$
$$\cos 2s + 1 + 2\lambda \cos s \sin s = 0 \tag{2}$$
$$\cos^2 t + \cos^2 s = 1. \tag{3}$$

pero

$$\cos^2 t + \cos^2 s = \frac{1}{2}[2 + \cos 2t + \cos 2s]$$

por lo tanto, usando (3);

$$\cos 2t + \cos 2s = 0$$

y de aquí

$$\sin 2t + \sin 2s = 0$$

Restando (1) − (2):

$$\cos 2t - \cos 2s = -1 + \lambda \sin 2t + 1 - \lambda \sin 2s = 0$$

Denotando $\xi = \cos 2t$, $\eta = \cos 2s$ se obtiene:

$$\xi - \eta = 0$$
$$\xi + \eta = 0$$

Por lo tanto $\cos 2t = \cos 2s = 0$ con que concluimos $t = s = \frac{\pi}{4}$ o en otras palabras $\theta_+ = \frac{\pi}{4}$, $\theta_- = -\frac{\pi}{4}$. **(3 puntos)**