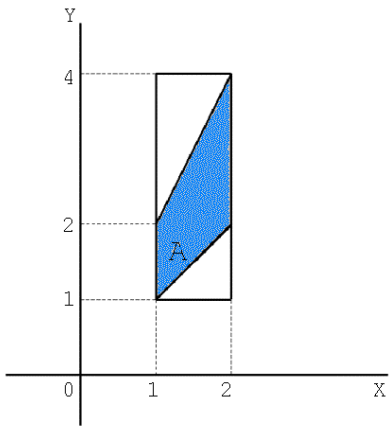
Problemas resueltos

1. Sea f una función definida en $I = [1,2] \times [1,4]$ del siguiente modo:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^{-2}, & x \le y \le 2x\ , \\ 0\ , & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Indique, mediante un dibujo, la porción A del rectángulo I en la que f no es nula y calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_A f$, supuesta su existencia.

Solución:



La región sombreada, $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ x \le y \le 2x\right\}$, es la porción del rectángulo en la que f no se anula. La función f es continua en A, por tanto f es integrable en A.

Luego, aplicando el teorema de Fubini:

$$\int_A f = \int_1^2 \left(\int_1^4 f(x,y)dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_x^{2x} \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx =$$
$$= \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y} \right]_x^{2x} dx = \int_1^2 (-\frac{1}{3x} + \frac{1}{2x})dx = \frac{1}{6} \log x \Big]_1^2 = \frac{1}{6} \log 2.$$

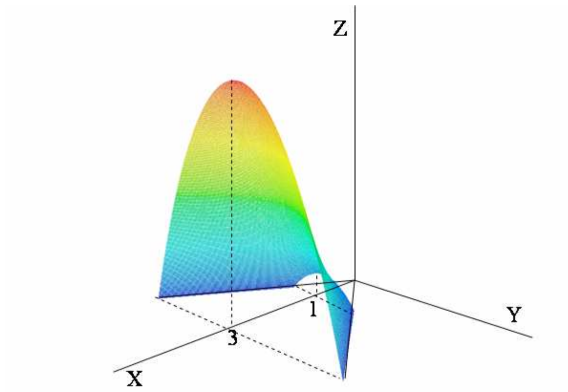
2. Un sólido está limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$, el plano xy, y los planos $x = 1$ y $x = 3$. Calcule su volumen por doble integración.

Solución:

La intersección de la superficie con el plano xy es:

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad y^2 = x^2 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} y = x \\ y = -x \end{array}\right\}$$

y con los planos $x = 1$ y $x = 3$, las parábolas $z = 1 - y^2$ y $z = 9 - y^2$, respectivamente.



Para hallar el volumen del sólido dado hemos de calcular la integral doble de la función $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ sobre la región D del plano xy comprendida entre las rectas $x = 1$, $x = 3$, $y = x$ e $y = -x$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x \leq 3, \ -x \leq y \leq x\}$$

$$\begin{aligned} V = \int\!\!\int_D (x^2 - y^2) dx dy &= \int_1^3 \left(\int_{-x}^{x} (x^2 - y^2) dy \right) dx = \\ &= \int_1^3 \left[x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{-x}^{x} dx = \int_1^3 \frac{4}{3} x^3 dx = \left. \frac{1}{3} x^4 \right]_1^3 = \frac{80}{3}. \end{aligned}$$

3. Calcule $\displaystyle\int\!\!\int_D x^2 y^2 dx dy$ siendo D la porción acotada del primer cuadrante situada entre las dos hipérbolas $xy = 1$ y $xy = 2$ y las líneas rectas $y = x$ e $y = 4x$.

Solución:

La región D es el conjunto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq xy \leq 2, \quad x \leq y \leq 4x\right\} = \\ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq xy \leq 2, \ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4\right\}.$$

Esta expresión nos sugiere el cambio de variables

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}.$$

Con lo que

$$y = vx, \ u = vx^2 \quad \to \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \ y = \sqrt{uv}, \quad \text{siempre que} \quad u, v > 0$$

y la transformación que obtenemos es

$$T :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2, \quad T(u,v) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}).$$

T es una transformación inyectiva (para cada (x,y) hay un solo (u,v) tal que $T(u,v) = (x,y)$) y es de clase $\mathcal{C}^1$. Hemos de comprobar además que su jacobiano es no nulo:

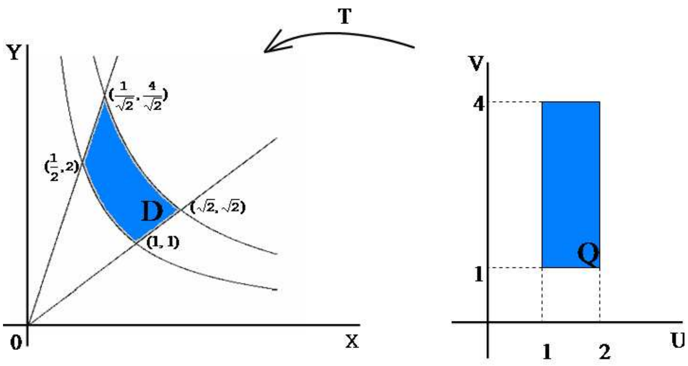
$$J_T(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{1/v}{2\sqrt{u/v}} & \dfrac{-u/v^2}{2\sqrt{u/v}} \\ \\ \dfrac{v}{2\sqrt{uv}} & \dfrac{u}{2\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v} \neq 0, \quad \forall u, v > 0.$$

Podemos dibujar fácilmente la región D calculando los puntos de corte de las rectas con las hipérbolas dadas (recordemos que son sólo los del primer cuadrante):

$$\left.\begin{array}{l} xy = 1 \\ y = x \end{array}\right\} \to x^2 = 1 \to P_1 = (1,1); \quad \left.\begin{array}{l} xy = 1 \\ y = 4x \end{array}\right\} \to x^2 = \frac{1}{4} \to P_2 = (\frac{1}{2}, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} xy = 2 \\ y = 4x \end{array}\right\} \to x^2 = \frac{1}{2} \to P_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}});$$

$$\left.\begin{array}{l} xy = 2 \\ y = x \end{array}\right\} \to x^2 = 2 \to P_4 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$



Es obvio que esta región D (en el plano xy) es la imagen, $T(Q)$, del recinto (en el plano uv)

$$Q = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq u \leq 2, \ 1 \leq v \leq 4\right\}.$$

Aplicando el teorema del cambio de variable obtenemos:

$$\begin{aligned} \int\int_D x^2y^2dxdy &= \int\int_Q u^2\frac{1}{2v}dudv = \\ &= \int_1^2 u^2du.\int_1^4 \frac{1}{2v}dv = \left.\frac{u^3}{3}\right]_1^2 . \left.\frac{1}{2}\log v\right]_1^4 = \frac{7}{3}\log 2. \end{aligned}$$

4. Calcule la integral

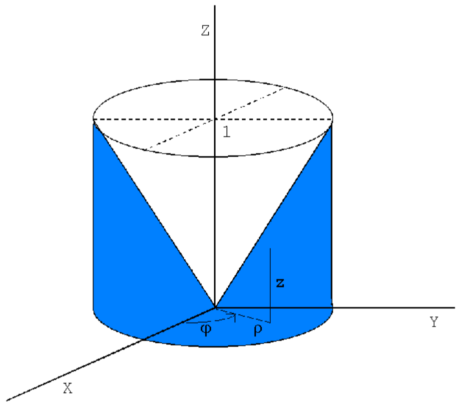
$$\int\int\int_V (2zx^2 + 2zy^2)\, dxdydz\ ,$$

siendo V el volumen exterior a la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z \geq 0$.

Solución:

La intersección del cono con el cilindro es:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \text{la circunferencia} \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{en el plano} \quad z = 1.$$



El conjunto V será el conjunto descrito por:

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

Haciendo el cambio a coordenadas cilíndricas

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \\ z = z \end{array}\right\} \quad T : U \to \mathbb{R}^3, \quad T(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \operatorname{sen} \varphi, z)$$

siendo

$$U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times\mathbb{R}, \quad J_T(\rho, \varphi, z) = \rho.$$

De esta manera, y puesto que $x^2 + y^2 = \rho^2 = 1$ en el cilindro y $z^2 = \rho^2$ en el cono, el recinto V es la imagen, $T(Q)$, (salvo un conjunto de medida cero, que es la región del plano $y = 0$ comprendida entre el cilindro y el cono) del conjunto

$$Q = \{(\rho, \varphi, z) \in U : \ 0 < \rho \leq 1, \ 0 < \varphi < 2\pi, \ 0 \leq z \leq \rho\} \subset U.$$

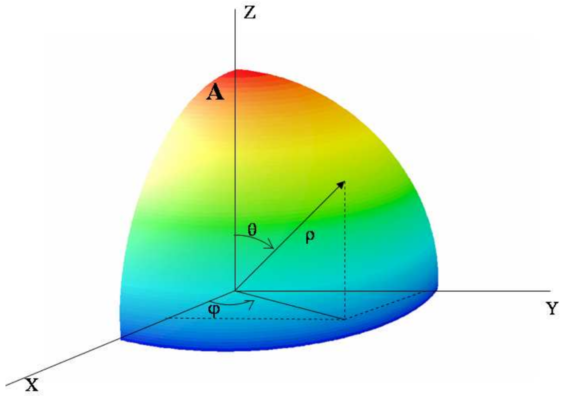
Por tanto, haciendo la integral con este cambio de variable obtenemos:

$$\begin{aligned} &\int\!\!\int\!\!\int_V (2zx^2 + 2zy^2)\, dxdydz = \\ &\quad = \int\!\!\int\!\!\int_Q 2z\rho^2\rho\, d\rho d\varphi dz = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\rho} 2z\rho^3\, dz\right) d\varphi\right] d\rho = \\ &\quad = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} z^2\rho^3\Big]_0^{\rho} d\varphi\right) d\rho = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^5 d\varphi\right) d\rho = 2\pi\, \frac{\rho^6}{6}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

5. Calcule la integral $\displaystyle\iiint_A xyz\,dxdydz$, siendo A el conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\}.$$

Solución:



Puesto que el conjunto A es un trozo de esfera haremos el cambio a coordenadas esféricas para que el recinto de integración sea más manejable.

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{array}\right\}$$

$$T : U \to \mathbb{R}^3, \quad T(\rho,\varphi,\theta) = (\rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\theta)$$

T es $\mathcal{C}^1$-invertible, con jacobiano, $J_T(\rho,\varphi,\theta) = -\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta$, distinto de cero en cualquier punto del abierto $U =]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[$.

Sea

$$Q = \left\{(\rho,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < \rho \leq 1,\ 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} \subset U.$$

Es claro que su imagen mediante T es

$$T(Q) = A - \{(x,y,z) \in A :\ y = 0\}$$

y puesto que el conjunto $\{(x,y,z) \in A: \ y = 0\}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^3$, (es un trozo de plano) podemos aplicar el teorema del cambio de variable para calcular la integral que se pide por medio de una integral sobre el rectángulo Q:

$$\iiint_A xyz\, dxdydz =$$

$$= \iiint_Q \rho\cos\varphi \operatorname{sen}\theta\, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta\, \rho\cos\theta\, \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^5 \operatorname{sen}\varphi\, \cos\varphi \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta\, d\theta \right] d\varphi \right] d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\varphi\, \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta\, d\theta =$$

$$= \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 \left[\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\operatorname{sen}^4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{48}.$$

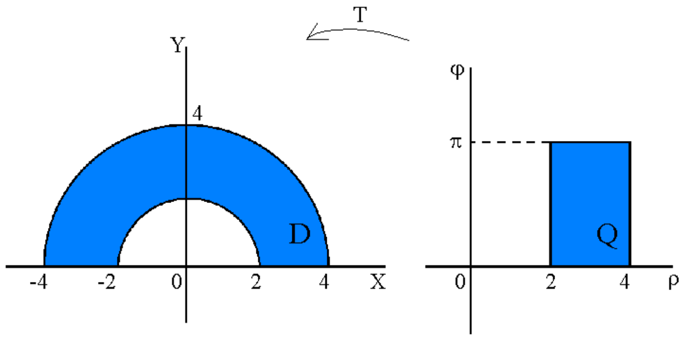
6. Calcule la integral

$$\int\int_D (x^2 + 5y^2) dxdy\ ,$$

extendida a la región del plano

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ y \geq 0, \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Solución:



La región D es una corona circular; esto sugiere el cambio a polares para hacer la integral. Hacemos la transformación

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{array}\right\} \quad T : U \to \mathbb{R}^2, \quad T(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

donde $U =]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ y $J_T(\rho,\varphi) = \rho$ es distinto de cero en U.

La corona D es la imagen mediante T del rectángulo

$$Q = \left\{\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 \leq \rho \leq 4, \quad 0 < \varphi \leq \pi\right\} \subset U$$

salvo un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^2$ que es el trozo del eje OX comprendido entre $x = 2$ y $x = 4$ (que se obtendría con la imagen de los puntos tales que $\varphi = 0$). Aplicando el cambio de variable calculamos la integral doble en D por medio de una integral doble en Q, que nos resultará mucho más sencilla de calcular porque Q es un rectángulo:

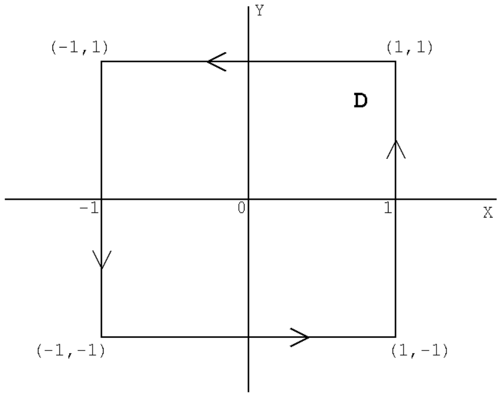
$$\begin{aligned} \int\!\!\int_D (x^2+5y^2)dxdy &= \int\!\!\int_Q \left(\rho^2\cos^2\varphi + 5\rho^2\mathrm{sen}^2\varphi\right)\rho\, d\rho d\varphi = \\ &= \int_2^4 \left[\int_0^\pi \rho^3\left(1+4\mathrm{sen}^2\varphi\right)d\varphi\right]d\rho = \\ &= \int_2^4 \rho^3\left[\int_0^\pi [1+2(1-\cos 2\varphi)]\,d\varphi\right]d\rho = \\ &= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_2^4 \Big[3\varphi - \mathrm{sen}\,2\varphi\Big]_0^\pi = 180\pi. \end{aligned}$$

7. Utilizando el teorema de Green-Riemann, calcule la integral de línea

$$\int_\gamma y^2dx + xdy\ ,$$

siendo γ el cuadrado de vertices (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1).

Solución:



LLamemos D a la región, convexa, limitada por γ. Es obvio que

$$D = \gamma^* \cup int\gamma = [-1,1] \times [-1,1].$$

Aplicaremos la fórmula de Green-Riemann

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

con $P(x,y) = y^2$ y $Q(x,y) = x$ que son de clase $\mathcal{C}^1$. Así:

$$\int_\gamma y^2 dx + xdy = \int\int_D (1-2y)dxdy = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} (1-2y)dy \right] dx =$$
$$= \int_{-1}^{1} \left[y - y^2 \right]_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1} 2dx = 4.$$

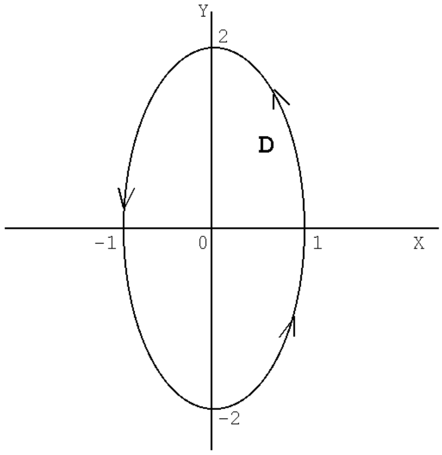
8. Considere la curva γ una parametrización de la elipse $4(x^2-1)+y^2 = 0$. Calcule la integral

$$\int_\gamma (x+y)dx + (y-x)dy.$$

a) Directamente.

b) Aplicando el teorema de Green-Riemann.

Solución:



a) Para calcular la integral de línea hemos de parametrizar la elipse:

$$4(x^2-1)+y^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{y^2}{4}=1 \quad \rightarrow \quad \gamma(t)=(\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t),\ \forall t\in[0,2\pi]$$

que es una parametrización de clase $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned}\int_\gamma (x+y)dx+(y-x)dy = \\ &= \int_0^{2\pi}[(\cos t+2\,\mathrm{sen}t)(-\mathrm{sen}t)+(2\,\mathrm{sen}t-\cos t)2\cos t]dt = \\ &= \int_0^{2\pi}(\mathrm{sen}t\cos t-2)dt=\left[\frac{\mathrm{sen}^2 t}{2}-2t\right]_0^{2\pi}=-4\pi.\end{aligned}$$

b) Sea $D=\gamma^*\cup int\gamma$. Aplicando el teorema de Green-Riemann con $P(x,y)=x+y$ y $Q(x,y)=y-x$, y teniendo en cuenta que el área de la elipse de semiejes a y b es πab (en nuestro caso $a=1$, $b=2$), obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_\gamma (x+y)dx+(y-x)dy &= \int_\gamma P dx+Q dy=\int\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \\ &= \int\int_D(-2)dxdy=-2\mu(D)=-4\pi.\end{aligned}$$

9. Calcule el área de la región del primer cuadrante comprendida entre las curvas:

$$y^2 = 2x, \quad 2x + y = 20, \quad y = 0.$$

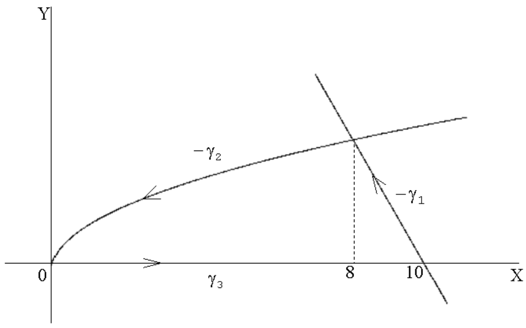
a) Mediante una integral doble.

b) Mediante una integral de línea.

Solución:

a) Calculemos la intersección de la parábola y la recta que delimitan la región descrita:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2x \\ 2x + y = 20 \end{array}\right\} \rightarrow \; y^2 + y - 20 = 0 \; \rightarrow \; \begin{array}{l} y = -5, \quad \text{no es positivo} \\ y = 4, \quad x = 8 \end{array}$$



La región dada D es la unión de dos regiones

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2x}\right\}$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 8 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 20 - 2x \right\}$$

con medida en $\mathbb{R}^2$. El área de $D = D_1 \cup D_2$, calculada mediante una integral doble, será:

$$\int\int_D dxdy = \int\int_{D_1} dxdy + \int\int_{D_2} dxdy$$

$$\int\int_{D_1} dxdy = \int_0^8 \left[\int_0^{\sqrt{2x}} dy\right] dx = \int_0^8 \sqrt{2x}\, dx = \left.\sqrt{2}\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{64}{3}.$$

$$\int\int_{D_2} dxdy = \int_8^{10} \left[\int_0^{20-2x} dy\right] dx = \int_8^{10} (20 - 2x)dx = \left. 20x - x^2\right]_8^{10} = 4.$$

Sumando las dos integrales obtenemos:

$$\text{area de } D = \int\int_D dxdy = \frac{64}{3} + 4 = \frac{76}{3}.$$

b) Hemos de parametrizar la curva γ que delimita la región D :

- la recta $2x + y = 20$: $\gamma_1(t) = (t, 20 - 2t)$, $t \in [8, 10]$
- la parábola $y^2 = 2x$: $\gamma(t) = (\frac{t^2}{2}, t)$, $t \in [0, 4]$
- el eje OX : $\gamma(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 10]$.

De esta manera es $\gamma = (-\gamma_1) \cup (-\gamma_2) \cup \gamma_3$.

Por el teorema de Green-Riemann, tomando $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$, podemos calcular el área de D como:

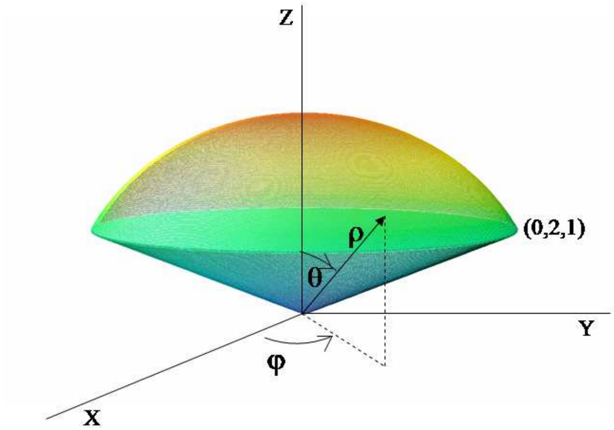
$$\int\int_D dxdy = \int_\gamma xdy = -\int_{\gamma_1} xdy - \int_{\gamma_2} xdy + \int_{\gamma_3} xdy =$$
$$= -\int_8^{10} (-2t)dt - \int_0^4 \frac{t^2}{2}\,dt = \left. t^2\right]_8^{10} - \left.\frac{t^3}{6}\right]_0^4 = \frac{76}{3}.$$

10. Calcule, mediante integración, el volumen del sólido limitado por el cono $x^2 + y^2 = 4z^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, siendo $z \geq 0$.

Solución:

La intersección de las dos superficies es

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 4z^2 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 5z^2 = 5 \rightarrow z^2 = 1 \rightarrow z = 1 \quad (z \geq 0) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{array}$$



Sea V el sólido considerado. Su volumen es

$$\mu(V) = \int\int\int_V dxdydz$$

Para calcular esta integral haremos un cambio a coordenadas esféricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{array}\right\} \quad J_T(\rho,\varphi,\theta) = -\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta$$

La variación del ángulo θ dentro del recinto de integración viene dada por el ángulo que forma la generatriz del cono con el eje OZ en un punto de la intersección de las dos superficies, por ejemplo el punto $(0,2,1)$. En este punto $\tan\theta = 2$ y por lo tanto $\theta = \arctan 2$. El radio vector ρ variará desde 0 al radio de la esfera $\sqrt{5}$ y el ángulo φ debe recorrer toda la circunferencia, de modo que si consideramos el conjunto

$$Q = \left\{(\rho,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le \rho \le \sqrt{5},\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta \le \arctan 2\right\}$$

su imagen mediante T es el recinto V (salvo un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^3$: los puntos para los que $\varphi = 0$ ó $\theta = 0$). Entonces

$$\int\int\int_V dxdydz = \int\int\int_Q \rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 d\rho \int_0^{\arctan 2} \mathrm{sen}\,\theta d\theta = 2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{5}} \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\arctan 2} =$$

$$= \frac{10\sqrt{5}}{3}\pi\left[-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right]_0^{\arctan 2} = \frac{10}{3}\pi(\sqrt{5}-1).$$

Problemas propuestos

1. Calcule las integrales dobles por integración sucesiva

a) $\displaystyle\int\int_I xy(x+y)dxdy$ donde $I=[0,1]\times[0,1]$.

b) $\displaystyle\int\int_I \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y dxdy$ donde $I=[0,\pi]\times[0,\pi]$.

c) $\displaystyle\int\int_I \operatorname{sen}(x+y)dxdy$ donde $I=[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$.

Solución:

a) $1/3$. b) $\pi^2/4$. c) 2.

2. Calcule $\displaystyle\int\int_I f(x,y)dxdy$ siendo $I=[0,1]\times[0,1]$,

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & x^2\le y\le 2x^2 \,, \\ 0\,, & \text{en el resto.}\end{cases}$$

Solución: $\dfrac{21}{40}-\dfrac{2}{5\sqrt{2}}$.

3. Calcule la integral doble $\displaystyle\int_A (x^2+y^2)\,dxdy$ siendo

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}.$$

Solución: $1/2$.

4. Calcule la integral doble $\displaystyle\int_A (4x+7y)\,dxdy$ donde

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1, x^3\le y\le x\}.$$

Solución: $\dfrac{12}{10}$.

5. Dibuje la región de integración y calcule la integral doble

a) $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$ siendo D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$.

b) $\displaystyle\int\int_D (1+x)\text{sen}y\, dxdy$ siendo D el trapezoide de vértices (0,0), (1,0), (1,2), (0,1).

c) $\displaystyle\int\int_D (x^2-y^2)dxdy$ siendo D la región limitada por el eje OX y la gráfica de la función $y = \text{sen}x$ en el intervalo $[0,\pi]$.

Solución: a) $13/6$. b) $3/2 - 2\sin(2) - \cos(2) + \sin(1) + \cos(1)$. c) $\pi^2 - 40/9$.

6. Considere la aplicación T definida por las ecuaciones

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv.$$

a) Calcule el jacobiano $J_T(u,v)$.

b) Sea Q el rectángulo en el plano uv con vértices (1,1), (2,1), (2,3), (1,3). Represente, mediante un dibujo, la imagen $T(Q)$ en el plano XY.

Solución: a) $J_T(u,v) = 4(u^2+v^2)$.

7. Considere la aplicación T definida por las ecuaciones

$$x = u + v, \qquad y = v - u^2.$$

a) Calcule el Jacobiano $J_T(u,v)$.

b) Un triángulo Q en el plano (u,v) tiene vértices (0,0), (2,0), (0,2). Represente, mediante un dibujo, la imagen $T(Q) = D$ en el plano xy.

c) Calcule el área de D mediante una integral doble extendida a D y también mediante otra integral doble extendida a Q.

Solución: Area $= 14/3$.

8. Si V es el sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1\ , \qquad \text{calcule} \qquad \int\int\int_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz.$$

Solución: Cambio: $x = a\rho\sin(\theta)\cos(\varphi)$, $y = b\rho\sin(\theta)\sin(\varphi)$, $z = c\rho\cos(\theta)$. $|J_T| = abc\rho^2\sin(\theta)$. Resultado: $\dfrac{4}{5}\pi abc$.

9. Calcule la integral $\displaystyle\iiint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, siendo A el sólido formado por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$.

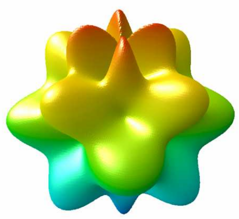
Solución: $\pi/6$.

10. Calcule la integral $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, siendo V el sólido limitado por la superficie $2z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$.

Solución: Cambio a coordenadas cilíndricas. Solución: $16\pi/3$.

11. Halle el volumen del tumor cuya ecuación en esféricas es

$$0 \leq \rho \leq 3 + \operatorname{sen}(5\varphi)\operatorname{sen}(4\theta), \quad \varphi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [0, \pi].$$



Solución: $821\pi/21$

12. Utilizando el cambio a polares, halle

$$\iint_D x^2 + y^2, \quad \text{siendo } D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\Big\}.$$

Solución: $3\pi/2$

13. La densidad en un punto (x, y) sobre la lámina semicircular

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq r^2\Big\}$$

es $f(x,y) = a\sqrt{x^2+y^2}$. Calcule el centro de masa de la lámina.

Solución: $(0, 3r/2\pi)$

14. Sea S el sólido limitado por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$, $y = 3x$, $z = 0$ en el primer octante. Si tiene una función de densidad dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, calcule su masa, centro de masa y momento de inercia alrededor del eje OZ.

15. Halle el volumen del sólido comprendido dentro del tronco cónico $x^2 + y^2 = (z-1)^2$, con $z \in [0, \frac{1}{2}]$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, utilizando el teorema de Pappus-Guldin.

Solución: $\pi/6$

16. Halle el volumen del toro de radios R y r $(R > r)$ de ecuación $z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 \leq r^2$

a) utilizando el cambio a coordenadas cilíndricas.

b) utilizando el teorema de Pappus-Guldin.

Solución: $2\pi^2 R r^2$

17. Utilizando el teorema de Green-Riemann, calcule la integral de línea

$$\int_\gamma y^2 dx + x dy \ ,$$

siendo γ la circunferencia de radio 2 y centro en el origen.

Solución: 4π.

18. Calcule, aplicando la fórmula de Green-Riemann, la integral

$$\int_\gamma (2xy - x^2)dx - (x + y^2)dy \ ,$$

siendo γ la curva formada por los ejes coordenados y el cuadrante positivo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Solución: $-\pi - 16/3$.

19. Calcule, mediante una integral de línea, el área de la región plana:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \geq y^2 - 1 \, , \; x^2 + 4y^2 \leq 4 \}$$

20. Calcule el área de la región del primer cuadrante limitada por la curva

$$\rho = 3 \cos 3t \; , \qquad t \in [0, \frac{\pi}{6}].$$

a) Mediante una integral doble.

b) Mediante una integral de línea.

Solución: $3\pi/8$.

21. Sea D la región interior a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ y exterior al círculo $x^2 + y^2 = 1$. Denotando por α a la frontera de esta región, calcule la integral de línea

$$\int_\alpha 2xydx + (x^2 + 2x)dy.$$

Solución: 10π.

22. Calcule el área de la región interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y a la derecha de la recta $x = 1$.

Solución: $4\pi/3 - \sqrt{3}$.

23. Calcule el área de la región del plano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \leq 4x - x^2, \; y \geq 6 - 3x, \; y \geq 0\}.$$

Solución: $151/6$.

24. Halle el volumen limitado por:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$.

b) $z = x^2 + 6y^2$, $x^2 + 4y^2 = 4$, $z = 0$.

Solución: a) $19\pi/6$. b) $20\pi/3$.

25. Calcule la integral triple $\displaystyle\int\int\int_V (4x^2+9y^2+36z^2)dxdydz$ siendo V el interior del elipsoide

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1.$$

Solución: Cambio: $x=3\rho\sin(\theta)\cos(\varphi),\ y=2\rho\sin(\theta)\sin(\varphi),\ z=\rho\cos(\theta)$. $J_T=-6\rho^2\sin(\theta)$. Valor de la integral: $\frac{864}{5}\pi$.

26. Haciendo un cambio a coordenadas esféricas, resuelva la integral

$$\iiint_A (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz\ ,$$

siendo A el sólido

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\le 1\ ,\quad x^2+y^2\le z^2,\quad z\ge 0\}.$$

27. Calcule el volumen del sólido limitado por las superficies

$$z=4-y^2,\quad y=x,\quad x=2,\quad z=0.$$

28. Utilizando un cambio de variable, halle el valor de la integral

$$\int\int_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dxdy\ ,$$

donde D es el paralelogramo de vértices $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$.

29. Sea la región D del plano limitada por las curvas $4x^2+(y-1)^2=4$, $4x^2+(y+1)^2=4$ y que contiene el (0,0).

a) Calcule la integral

$$\int\int_D (x-y)\,dxdy.$$

b) Calcule la integral anterior como la integral curvilínea de cierto campo vectorial $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. (Utilice el teorema de Green-Riemann para encontrar el campo F adecuado).

30. Calcule la integral

$$\int\int\int_V z\sin(x^2+y^2)dxdydz\ ,$$

siendo V el sólido limitado por las superficies

$$z=\cos(x^2+y^2), \quad z=0 \quad \text{con } \ z\geq 0.$$

31. Calcule el área, utilizando coordenadas polares, de la región limitada por la curva

$$(x^2+y^2)^2=2xy, \quad x\geq 0,\ y\geq 0,$$

a) mediante una integral curvilínea,

b) mediante una integral doble.

32. Calcule el volumen de la porción del sólido comprendido entre las superficies

$$(z+1)^2=x^2+y^2, \quad 4z=x^2+y^2,$$

situada por encima el plano XY.