Auxiliar nº?: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Emilio Vilches & Gonzalo Mena

10 junio, 2009

Pregunta 1

1. Sea $S(x_1, ...x_n) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$Definida en $x_i > 0$. Encuentre los puntos críticos y clasifíquelos
2. Maximice S sujeto a $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$
3. Demuestre que el problema de maximizar S sujeto a $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ y a $\sum_{i=1}^{n} x_i E_i = E$ donde los E_i y E son dados, y $E_1 < .. < E_n$tiene soluciones de la forma $x_i = \dfrac{e^{-\beta E_i}}{Z}$ con $Z = \sum_{i=1}^{n} e^{-\beta E_i}$ y plantee una ecuación que permita despejar β

Pregunta 2

Definición: Un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice convexo si

$$\forall x, y \in \Omega,\ \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$$

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa si

$$\forall x, y \in \Omega,\ \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Consideremos ahora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y convexo, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable

a)Pruebe que f es convexa ssi $f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle\ \forall x, y \in \Omega$

b)Pruebe que si f es convexa entonces $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0\ \forall x, y \in \Omega$

c)Si f es convexa y $x_0 \in \Omega$ un mínimo local pruebe que x_0 es mínimo global de f Ω

Pregunta 3

Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable y que $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f = \frac{1}{2}$

Pregunta 4

Determine los máximos y mínimos globales de la función $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy$ restringido a $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1$