

Auxiliar extra C2: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Emilio Vilches & Gonzalo Mena

25 de mayo, 2009

Pregunta 1

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 &= 0 \\x + z + u^2 + w + 2 &= 0\end{aligned}$$

(a) Mostrar que es posible despejar u, v, w en función de x, y, z en una vecindad del punto $(x, y, z, u, v, w) = (0, 0, 0, 0, 0, -2)$

(b) Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0, 0), \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0, 0), \frac{\partial w}{\partial x}(0, 0, 0)$

Pregunta 2

Sea $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$v(x, y) = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{y^2 + x^2}\right)$$

Demuestre que u es armónica $\Leftrightarrow v$ es armónica (en sus respectivos dominios de definición)

Pregunta 3

Sea $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$. Encontrar el desarrollo de Taylor de orden 2 en torno a $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Pregunta 4

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Para cada $x \in \mathbb{R}$ defina $\begin{matrix} g_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto f(x, y) \end{matrix}$ Suponga que para cada x existe un único y tal que $g'_x(y) = 0$. Si se denota por $c(x)$ tal y , y se supone que c es diferenciable. Demostrar:

(a) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \neq 0 \forall (x, y)$ entonces si $y = c(x)$:

$$c'(x) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)}$$

(b) Si $c'(x) = 0$ entonces existe un \bar{y} tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \bar{y}) = 0 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}) = 0$$