PAUTA CONTROL II MA 2A1, 2008/1

(1) (a) (3pt) Considere la función

$$f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x - 6y + 1.$$

Encuentre sus puntos críticos y clasifíquelos. Determine si esta función posee un mínimo global.

Solución. Calculamos

$$f_x(x, y) = 9x^2 - 9, \quad f_y(x, y) = 2y - 6$$

lo que nos da los puntos críticos $(1, 3)$ y $(-1, 3)$. Por otra parte

$$f_{xx}(x, y) = 18x, \quad f_{yy}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = 0.$$

De modo que

$$f''(1, 3) = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad f''(-1, 3) = \begin{bmatrix} -18 & 0 \\ & \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.],$$

Como los valores propios de $f''(1, 3)$ son positivos, $(1, 3)$ es un mínimo local. Del mismo modo, $(-1, 3)$ es un punto silla. Finalmente observemos que la función no es acotada inferiormente, pues

$$f(-n, 0) = -3n^3 + 9n \to -\infty \quad \text{si } n \to +\infty.$$

Por lo tanto, f no posee un punto de mínimo global.
(b) (3pt) Lo mismo que en la parte (a) para la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$$

Solución.

$$f_x(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 1)x, \quad f_y(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 1)y,$$

por lo que (x, y) es un punto crítico de f si y solo si es un punto del círculo $x^2 + y^2 = 1$ o $(x, y) = (0, 0)$. Notemos que

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 + 4y^2 - 4 & 8yx \\ 8yx & 12y^2 + 4x^2 - 4 \end{bmatrix},$$

y entonces

$$f''(0, 0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

que es definida negativa, por lo tanto este punto es un máximo local. Finalmente, notemos que todo punto $(\bar{x}, \bar{y})$ con $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$ satisface

$$f(x, y) \geq 0 = f(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

por ende estos puntos son mínimos globales.

(2) (a) (3pt) Sea $f(x,y) = xye^{x^2+2y^2}$. Encuentre (explícitamente) un polinomio en dos variables, $T(x,y)$, con la propiedad que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T(x,y)}{x^4 + y^4} = 0$$

Solución. Notemos que si $\phi(t) = e^t$ entonces, por el teorema de Taylor en una variable

$$e^t = \phi(0) + \phi'(0)t + \phi''(\xi)\frac{t^2}{2}, \quad \xi \in]0, t[.$$

Reemplazando $t = x^2 + y^2$, usando que $\phi(0) = \phi'(0) = 1$ obtenemos

$$e^{x^2+2y^2} = 1 + x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2}e^{\xi}(x^2 + 2y^2)^2 \quad \xi \in]0, x^2 + 2y^2[.$$

Por lo tanto,

$$xye^{x^2+2y^2} - xy(1 + x^2 + 2y^2) = \frac{1}{2}xye^{\xi}(x^2 + 2y^2)^2$$

y entonces, como $\xi \to 0$, cuando $(x,y) \to (0,0)$ encontramos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T(x,y)}{x^4 + y^4} = 0$$

si tomamos $T(x,y) = xy(1 + x^2 + 2y^2)$.

Nota: Se obtiene el mismo resultado, aunque con más cálculos si se hace un desarrollo de Taylor de orden 4 de la función $f(x,y)$ en torno a $(0,0)$.

(b) (3pt) Sean $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^N$ un punto tal que $\nabla f(x_0) = 0$ y $f''(x_0)$ es invertible. Demuestre que para todo $a \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, la función

$$f^a(x) := f(x) + ag(x)$$

posee al menos un punto crítico.

Solución. Como se sugiere en la indicación, consideramos la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$F(a,x) := \nabla f(x) + a\nabla g(x).$$

Como f y g son de clase C^2, la función F resulta ser de clase C^1. Por hipótesis $F(0, x_0) = 0$. Además

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,x) = f''(x) + ag''(x),$$

por lo que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, x_0) = f''(x_0),$$

y esta matriz es invertible, por hipótesis. El teorema de la función implícita nos dice entonces que existe $\delta > 0$ y una funcón $x :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^N$, $a \mapsto x(a)$, de clase C^1, con $x(0) = x_0$ y tal que

$$F(a, x(a)) = 0 = \nabla f^a(x(a)) \quad \forall\, a \in]-\delta, \delta[,$$

esto es, $x(a) \in \mathbb{R}^N$ es punto crítico de f^a.

(3) La *ecuación de ondas* en la recta es la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0 \qquad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

cuya incógnita es una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) (3pt) Sea $f(x,t)$ una solución de esta ecuación de clase C^2. Demuestre que existen dos funciones $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tales que

$$f(x,t) = p(x+t) + q(x-t) \qquad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Solución. Como se sugiere en la indicación, consideramos la función

$$g(u,v) := f\left(\frac{u+v}{2}\,,\,\frac{u-v}{2}\right).$$

Usando la regla de la cadena, obtenemos que

$$g_u(u,v) = f_x\left(\frac{u+v}{2}\,,\,\frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2} + f_t\left(\frac{u+v}{2}\,,\,\frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2}$$

y derivando una vez más,

$$g_{vu}(u,v) = (f_{xx} - f_{xt})\frac{1}{4} + (f_{tx} - f_{tt})\frac{1}{4}$$

por lo tanto,

$$g_{vu}(u,v) = \frac{1}{4}(f_{xx} - f_{tt})\left(\frac{u+v}{2}\,,\,\frac{u-v}{2}\right) = 0.$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial v} g_u(u,v) = 0$$

implica que para cada u la función $g_u(u,v)$ es constante en v, entonces es solo una función de u, digamos

$$g_u(u,v) = a(u)$$

Para cada v fijo, esta relación nos dice entonces que

$$g(u,v) = \int a(u)du + b(v) =: p(u) + q(v)$$

donde el símbolo $\int$ denota primitiva. Sustituyendo $u = x+t$, $v = x-t$ se sigue el resultado.

(b) (3pt) Utilice la parte (a) para encontrar una solución $f(x,t)$ de la ecuación de ondas que satisfaga las *condiciones iniciales*

$$f(x,0) = e^{-x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Solución. Busquemos una solución de la forma

$$f(x,t) = p(x+t) + q(x-t).$$

Cabe hacer notar que cualquier funcón de esta forma es automáticamente solución de la ecuación de ondas. Entonces requerimos simplemente que

$$f(x,0) = p(x) + q(x) = e^{-x^2}$$

y

$$f_t(x,0) = p'(x) - q'(x) = 0$$

La segunda relación se satisface si imponemos $p(x) = q(x)$, de modo que $p(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2}$ y el resultado es finalmente

$$f(x,t) = \frac{1}{2}e^{-(x+t)^2} + \frac{1}{2}e^{-(x-t)^2} \ .$$