Guía Control 2: Cálculo en Varias Variables

Michael Kowalczyc & Emilio Vilches & Gonzalo Mena

20 de Mayo de 2009

P1. Sean f y g dos funciones de variable real, derivables en $\mathbb{R}$. Se define la función:

$$z(x,y) = x^2yf(u) + xy^2g(v)$$

con $u = \frac{x}{y}$ y $v = \frac{y}{x}$, Calcule:

$$E = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

Solución:
Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2xyf(u) + x^2y\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + y^2g(v) + xy^2\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2f(u) + x^2y\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + 2xyg(v) + xy^2\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

pero

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2xyf(u) + x^2\frac{\partial f}{\partial u} + y^2g(v) - \frac{y^3}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2f(u) + \frac{-x^3}{y}\frac{\partial f}{\partial u} + 2xyg(v) + y^2\frac{\partial g}{\partial v}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}E =& x(2xyf(u) + x^2\frac{\partial f}{\partial u} + y^2g(v) - \frac{y^3}{x}\frac{\partial g}{\partial v}) + y(x^2f(u) - \frac{x^3}{y}\frac{\partial f}{\partial u} + 2xyg(v) + y^2\frac{\partial g}{\partial v})\\ =& 2x^2yf(u) + x^3\frac{\partial f}{\partial u} + xy^2g(v) - y^3\frac{\partial g}{\partial v} + yx^2f(u) - x^3\frac{\partial f}{\partial y} + 2xy^2g(v) + y^3\frac{\partial g}{\partial v}\\ =& 3x^2yf(u) + 3xy^2g(v) = 3z(x,y).\end{aligned}$$

P2. Sea $f(u,v)$ una función de clase C^2 dada y sea $g(x,y)$ una función definida por $g(x,y) = f(ax + by, cx + dy)$ donde a, b, c, d son constantes.

a) Encuentre las derivadas parciales $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

b) Supongamos que f satisface

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1.$$

Encuentre a, b, c, d tales que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1.$$

(Las constantes a, b, c, d no son necesariamente únicas).

Solución:

a) Sean $u = ax + by$, $v = cx + dy$, luego $g(x, y) = f(u, v)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = a\frac{\partial f}{\partial u} + b\frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = c\frac{\partial f}{\partial u} + d\frac{\partial f}{\partial v}$$

luego

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = a(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}) + b(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}) = a(a\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + c\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}) + b(a\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + c\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})$$

análogamente

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = c(b\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + d\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}) + d(b\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + d\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})$$

b) De la parte anterior

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} =(a^2 + bc)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (ac + cd)\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + (ba + db)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + (bc + d^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Como $f(u, v)$ es de clase C^2, se tiene que $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$, y para que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$, basta escoger a, b, c, d tales que

$$(a^2 + bc) =(bc + d^2) = 1$$
$$(ac + cd) = -(ba + db)$$

P3. Encuentre la expansión de Taylor de orden 2 para $f(x, y) = 1 + x \sin y$ en torno a $(x, y) = (0, 0)$.
Solución:
Sea $\vec{h} = (h_1, h_2)^t \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$T_2(\vec{h}) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}^t f''(0, 0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

calculando los términos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -x\sin y$$

evaluando en $(x, y) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

por lo tanto

$$T_2(\vec{h}) = 1 + h_1 h_2.$$

P4. *a*) Sea $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que la matriz $f''(x)$ es semidefinida positiva para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Demuestre que si x_0 es un punto critico de f entonces x_0 es un punto de mínimo global de f.

b) Use la parte (*a*) para mostrar que para todo par de números x, y, vale la desigualdad $x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 2x^2y^2 - 2xy - x - y + \frac{3}{2} \geq 0$

Solución:

a) Sea $d \in \mathbb{R}^N$ y consideremos la función $g(t) = f(x_0 + td)$, la cual es de clase C^2, pues f es de clase C^2 y además

$$g'(t) = f'(x_0 + td)d \quad g''(t) = d^t f''(x_0 + td)d$$

Usando Taylor de orden 2, en torno a $t_0 = 0$, se obtiene

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(\xi)t^2 \quad \xi \in (0,t)$$

pero $g(0) = f(x_0)$, $g'(0) = f'(x_0)d = 0$ (x_0 es punto critico) y como $f''(x)$ es semidefinida positiva para todo x, se tiene que

$$\frac{1}{2}g''(\xi) = \frac{1}{2}d^t f''(x_0 + \xi d)d \geq 0$$

por lo tanto $g(t) \geq g(0)$ y evaluando en $t = 1$

$$f(x_0 + d) \geq f(x_0) \quad \forall d \in \mathbb{R}^N$$

tomando $d = y - x_0$ se obtiene

$$f(y) \geq f(x_0) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$$

es decir x_0 es un mínimo global de f.

b) Consideremos la función $f(x,y) = x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 2x^2y^2 - 2xy - x - y + \frac{3}{2}$, la cual es de clase C^2. Además

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2x + 4xy^2 - 2y - 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 2y + 4x^2y - 2x - 1$$

además

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2 + 4y^2 & -2 \\ -2 & 12y^2 + 2 + 4x^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, para $(h_1, h_2)^t \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$(h_1, h_2)^t f''(x,y)(h_1, h_2) = (12x^2 + 2 + 4y^2)h_1^2 + (12y^2 + 2 + 4x^2)^2 h_2^2 \geq 0$$

es decir, $f''(x)$ es semidefinida positiva para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, así que para usar la parte (a), basta con encontrar un punto critico (x_0, y_0) de f y verificar que $f(x_0, y_0) \geq 0$. Debido a la simetría de las derivadas parciales, podemos buscar un punto critico tal que $x_0 = y_0$, lo que se traduce en que $4x_0^3 + 2x_0 + 4x_0^3 - 2x_0 - 1 = 0$, esto es $x_0 = \frac{1}{2}$ y además $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$, por lo tanto

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 2x^2y^2 - 2xy - x - y + \frac{3}{2} \geq 0$$

P5. Pruebe que la función $f(x,y) = (x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}y^3, y - \frac{1}{2}y^2 - x + \frac{1}{6}x^3)$ admite una inversa local de clase C^1 en torno a $(0,0)$. Demuestre que en torno al punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0,0,0,0)$,las variables (u,v) pueden ser despejadas en función de (x,y).

Solución

Calculamos el $f'(x,y)$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{3}{6}y^2 \\ -1 + \frac{3}{2}x^2 & 1 - y \end{pmatrix}$$

luego

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y $\det f'(0,0) \neq 0$ y así $f'(0,0)$ es invertible y utilizando el teorema de la función inversa se tiene que f admite una inversa local de clase C^1 en torno a $(0,0)$.