Auxiliar nº5: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Emilio Vilches & Gonzalo Mena

15 de abril, 2009

Pregunta 3

Sea S la superficie definida como

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 = 1 \right\}$$

1. Encuentre los planos tangentes a S en $\left(0, 2+\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$y $(0,1,0)$
2. Bosqueje la intersección a S al plano $x = 0$. en el bosquejo indique $\left(0, 2+\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$y $(0,1,0)$y los planos tangentes a S en dichos puntos.

Solución:

a)Notemos que el conjunto S puede ser expresado el siguiente conjunto de nivel.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, f(x,y,z) = 1 \right\} \; f(x,y,z) = z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2$$

Para los casos en que tengamos un conjunto de nivel, la ecuación del plano tangente a $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$está dada por

$$\nabla f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Es decir, el plano tangente tiene como vector normal al gradiente. En el caso $(x_0, y_0, z_0) = \left(0, 2+\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ tenemos

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2} - 2\right) \dfrac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 2\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - 2\right)\dfrac{2y_0}{2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2z_0$
Reemplazando:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{2}{\sqrt{2}}$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{2}{\sqrt{2}}$
La ecuación del plano normal es entonces

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\left(y - 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2}{\sqrt{2}}\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

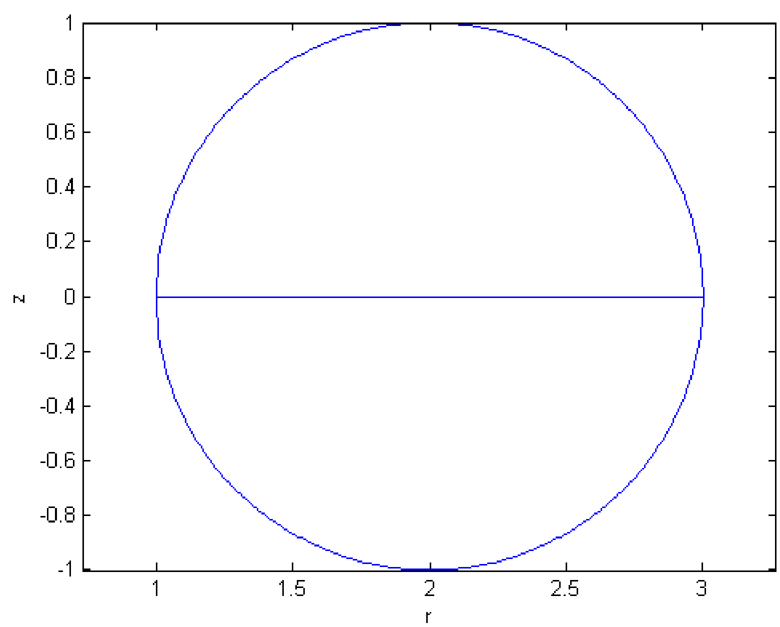
$$y + z = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Análogamente, para $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ obtenemos la ecuación

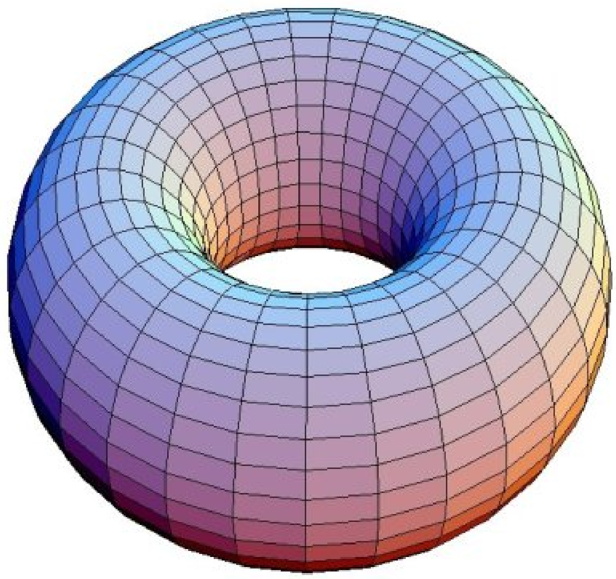
$$y = 1$$

b)Si queremos imaginarnos cómo luce la superficie S partamos por notar que si llamamos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces los puntos de S son los que satisfacen

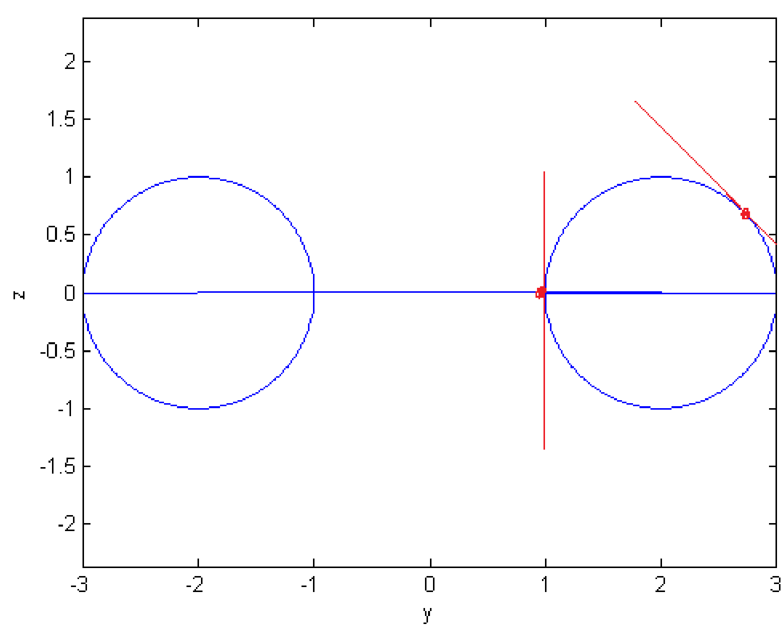
$z^2 + (r - 2)^2 = 1$ Es decir que si graficáramos en el eje z y el eje r tendriamos la siguiente figura:



pero como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces si queremos obtener toda la figura basta con imaginar la superficie que se obtendria al considerar todas las posibles combinaciones de x e y tales que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es decir, estamos en el caso de una “función” radial, y el grafico es como una dona (o toro en el lenguaje matemático):



Si $x = 0$ tenemos el siguiente corte:



En esta última figura se muestran los planos obtenidos para los dos puntos del enunciado (notar que en el punto $(0, 1, 0)$el plano que obtuvimos es $y = 1$, lo que significa que es vertical (y si pudiéramos ver en profundidad se prolongaria indefinidamente en ambas direcciones). Para el punto $\left(0, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ obtuvimos $\left(0, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y + z = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}}$ y podemos ver del dibujo que intuitivamente tiene que ser asi (la tangente tiene pendiente -1, obviamente hay que imaginárselo en la profundidad del eje x).