Clase Auxiliar: Cálculo en Varias Variables

Michael Kowalczyc & Emilio Vilches & Gonzalo Mena

7 de Abril de 2009

P1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudiar la Continuidad de f.

b) Probar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen para todo punto de $\mathbb{R}^2$, aunque no son continuas en $(0,0)$.

P2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f.

b) Calcule $\nabla f(0,0)$.

c) Probar que f es diferenciable en $(0,0)$.

d) Probar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ no son continuas en $(0,0)$.

P3. Suponga que $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas y satisface

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq K$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, n$.
Probar que

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} K \|x - y\|$$

Indicación: Use el teorema del valor medio de una variable en cada dirección e_i para $i = 1, \ldots, N$.